Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 21: Relationen

Thomas Worsch

KIT, Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2015/2016

Überblick

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen — eine «Verallgemeinerung» der Gleichheit

Relation $R \subseteq M \times M$ ist Äquivalenzrelation, falls

- reflexiv,
- symmetrisch und
- transitiv

typische Notation

- $\equiv$, $\sim$, $\approx$, oder ähnlich
- Infixschreibweise

also

- $\forall x \in M : x \equiv x$,
- $\forall x \in M : \forall y \in M : x \equiv y \longrightarrow y \equiv x$
- $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x \equiv y \land y \equiv z \longrightarrow x \equiv z$

Identität — einfachstes Beispiel einer Äquivalenzrelation

$\mathsf{I} = \{(x, x) \mid x \in M\}$ ist Äquivalenzrelation, denn

- $\forall x \in M : x = x$,
- $\forall x \in M : \forall y \in M : x = y \longrightarrow y = x$
- $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x = y \land y = z \longrightarrow x = z$

Kongruenz ganzer Zahlen modulo n

$x, y \in \mathbb{Z}$ heißen kongruent modulo n, wenn

- x und y gleichen Rest bei Division durch n liefern
- n teilt $x - y$
- $x - y = kn$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$x \equiv y \pmod{n}$ für $n \in \mathbb{N}_+$

Äquivalenzrelation, denn

- Reflexivität:
  $x - x = 0 = 0n$
- Symmetrie:
  wenn $x - y = kn$ dann $y - x = (-k)n$
- Transitivität:
  - wenn $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$
  - dann $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$

Beispiel: asymtptotisch gleiches Wachstum

$f \asymp g$

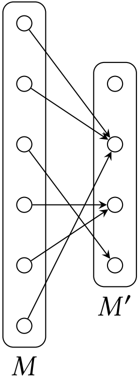
- $\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$.

reflexiv, symmetrisch, transitiv

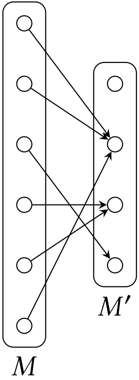
- siehe Kapitel 17

Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation

sei $f : M \to M'$



Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation

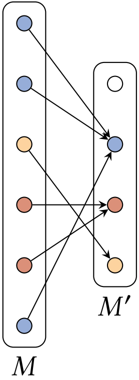


sei $f : M \to M'$

binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

$$\forall x \in M\ \forall y \in M : \ x \equiv_f y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

Urbilder von Funktionswerten — für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation

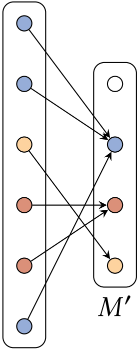


sei $f : M \to M'$

binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

$$\forall x \in M\ \forall y \in M :\ x \equiv_f y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

Urbilder von Funktionswerten —
für jede Abbildung eine Äquivalenzrelation



sei $f : M \to M'$

binäre Relation $\equiv_f \subseteq M \times M$ «Faserung von f»

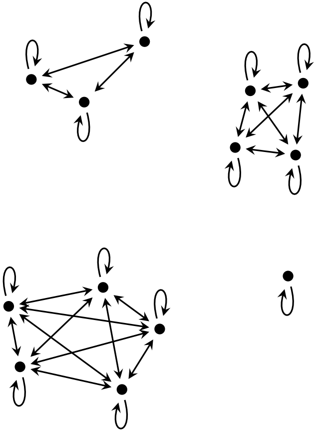
$$\forall x \in M\ \forall y \in M : \ x \equiv_f y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

$\equiv_f$ ist eine Äquivalenzrelation

- reflexiv
  - $f(x) = f(x)$ also $x \equiv_f x$
- symmetrisch
  - $f(x) = f(y) \longrightarrow f(y) = f(x)$ also $x \equiv_f y \longrightarrow y \equiv_f x$
- transitiv
  - $f(x) = f(y) \land f(y) = f(z) \longrightarrow f(x) = f(z)$

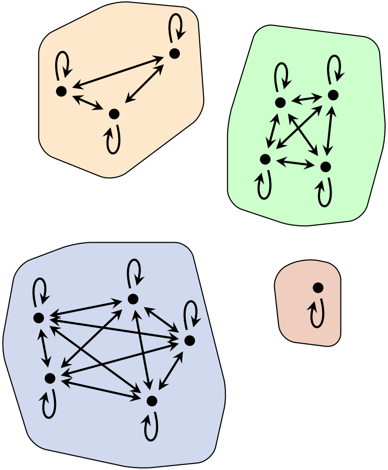
    $x \equiv_f y \quad \land \quad y \equiv_f z \quad \longrightarrow \quad x \equiv_f z$

Bild einer Äquivalenzrelation



hier drücken Pfeile die Äquivalenzbeziehung aus

Bild einer Äquivalenzrelation



hier drücken Pfeile die Äquivalenzbeziehung aus

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Äquivalenzklasse von $x \in M$ ist $\{y \in M \mid x \equiv y\}$

- Schreibweise $[x]_\equiv$ oder einfach $[x]$, falls $\equiv$ klar ist

Faktormenge (oder Faserung) von M nach $\equiv$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen

- Schreibweise $M_{/\equiv} = \left\{[x]_\equiv \;\middle|\; x \in M\right\}$

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

- je zwei gerade Zahlen sind äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

- je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
- je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

- je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
- je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent
- eine gerade und eine ungerade Zahl sind *nicht* äquivalent

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

- je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
- je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent
- eine gerade und eine ungerade Zahl sind *nicht* äquivalent

zwei Äquivalenzklassen

- $[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- $[1] = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

statt $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ oft $\mathbb{Z}_n$

Beispiel: Äquivalenzklassen von Kongruenz modulo 2

schreibe $\equiv_2$

$x \equiv_2 y$ genau dann, wenn $x - y$ durch 2 teilbar,

- je zwei gerade Zahlen sind äquivalent
- je zwei ungerade Zahlen sind äquivalent
- eine gerade und eine ungerade Zahl sind *nicht* äquivalent

zwei Äquivalenzklassen

- $[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
- $[1] = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

statt $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ oft $\mathbb{Z}_n$

mehr z. B. in „Theoretische Grundlagen der Informatik“

- Nerode-Äquivalenz für formale Sprachen

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Äquivalenzrelationen
  - Beispiel Kongruenz modulo n

Das sollten Sie üben:

- definierenden Eigenschaften überprüfen
- Anzahl Äquivalenzklassen bestimmen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen auf Mengen mit «Struktur»

Beispiel: $\equiv_n$ auf additiver Gruppe (oder Ring) $\mathbb{Z}$

Wie ändern sich Funktionswerte,
wenn man Argumente durch äquivalente ersetzt?

Verträglichkeit
von Äquivalenzrelationen mit Abbildungen

$\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und
$f : M \to M$ eine Abbildung

$\equiv$ ist mit f verträglich, wenn $\forall x_1, x_2 \in M$:

$$x_1 \equiv x_2 \longrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$$

$\equiv$ Äquivalenzrelation und
$\square$ eine binäre Operation auf M

$\equiv$ ist mit $\square$ verträglich, wenn $\forall x_1, x_2 \in M \; \forall y_1, y_2 \in M$:

$$x_1 \equiv x_2 \land y_1 \equiv y_2 \longrightarrow x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2$$

Veträglichkeit: Beispiel modulo

Äquivalenz „modulo n" mit
Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich

Beispiel

- wenn

$$\begin{array}{lllll} & x_1 \equiv x_2 \pmod{n} & \text{also} & x_1 - x_2 = kn \\ \text{und} & y_1 \equiv y_2 \pmod{n} & \text{also} & y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

- dann

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)n$$

$$\text{also} \qquad x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n}$$

Kongruenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch eine Kongruenzrelation.

Eine Operation für Äquivalenzklassen modulo n?

für die Äquivalenzklassen von $\equiv_n$ schreiben wir $[x]_n$

Was ist hiermit:

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : [x]_n + [y]_n = [x+y]_n \quad ??$$

Eine Operation für Äquivalenzklassen modulo n?

für die Äquivalenzklassen von $\equiv_n$ schreiben wir $[x]_n$

Was ist hiermit:

$$+\colon \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n : [x]_n + [y]_n = [x+y]_n \quad ??$$

Ist das in Ordnung?
Ist das eine Definition?
Wo kann ein Problem sein?

Verträglichkeit erlaubt die Übertragung einer Abbildung auf die Faktormenge

- Wenn $\equiv$ mit $f : M \to M$ verträglich ist, dann ist

$$f' : M_{/\equiv} \to M_{/\equiv} : f'([x]) = [f(x)]$$

  wohldefiniert.

- Wenn $\equiv$ mit $\square : M \times M \to M$ verträglich ist, dann ist

$$\square' : M_{/\equiv} \times M_{/\equiv} \to M_{/\equiv} : [x] \,\square'\, [y] = [x \,\square\, y]$$

  wohldefiniert.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Kongruenzrelationen: Verträglichkeit
- induzierte Abbildungen/Operationen für Äquivalenzklassen

Das sollten Sie üben:

- mit Äquivalenzklassen rechnen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Motivation — Rückblick auf endliche Akzeptoren

endlicher Akzeptor mit

$$f^*(z_0, w_1) = f^*(z_0, w_2)$$

Motivation — Rückblick auf endliche Akzeptoren

endlicher Akzeptor mit

$$f^*(z_0, w_1) = f^*(z_0, w_2)$$

dann für alle $w \in A^*$

$$f^*(z_0, w_1 w) = f^*(z_0, w_2 w)$$

Motivation — Rückblick auf endliche Akzeptoren

endlicher Akzeptor mit

$$f^*(z_0, w_1) = f^*(z_0, w_2)$$

dann für alle $w \in A^*$

$$f^*(z_0, w_1 w) = f^*(z_0, w_2 w)$$

also für alle $w \in A^*$

$$w_1 w \in L \longleftrightarrow w_2 w \in L$$

Äquivalenzrelation von Nerode einer Sprache $L \subseteq A^*$

Relation $\equiv_L$ auf A^*: für alle $w_1, w_2 \in A^*$

$$w_1 \equiv_L w_2 \longleftrightarrow \left(\forall w \in A^* : w_1 w \in L \longleftrightarrow w_2 w \in L\right)$$

$w_1 \not\equiv_L w_2$:

- es gibt ein Wort $w \in A^*$ so, dass
- *genau eines* der Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L liegt,
- aber das andere nicht.

Beispiel

$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

$L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$
   - Hängt man an beide Wörter ein $w \in \langle \mathtt{a*} \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
   - Hängt man ein $w \in \langle \mathtt{a*bb*} \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
   - Hängt man ein w an, das ba enthält, dann sind also beide nicht in L.
   - Andere Möglichkeiten für w gibt es nicht, also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.

Beispiel

$A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$

$L = \langle \texttt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \texttt{aaa}$ und $w_2 = \texttt{a}$: äquivalent
2. $w_1 = \texttt{aaab}$ und $w_2 = \texttt{abb}$
   - Hängt man ein $w \in \langle \texttt{b*} \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
   - Hängt man ein w an, das ein a enthält, dann sind also beide nicht in L.
   - Andere Möglichkeiten gibt es nicht, also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.

Beispiel

$A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$

$L = \langle \texttt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \texttt{aaa}$ und $w_2 = \texttt{a}$: äquivalent
2. $w_1 = \texttt{aaab}$ und $w_2 = \texttt{abb}$: äquivalent
3. $w_1 = \texttt{aa}$ und $w_2 = \texttt{abb}$
   - Hängt man $w = \texttt{a}$ an,
     dann ist zwar $w_1 w = \texttt{aaa} \in L$, aber $w_2 w = \texttt{abba} \notin L$.
   - Also sind die beiden Wörter *nicht* $\equiv_L$-äquivalent.

Beispiel

$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

$L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: nicht äquivalent
4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$
   - Beide enthalten ba. Egal was man anhängt, es bleibt so, d. h. immer sind $w_1 w \notin L$ und $w_2 w \notin L$.
   - Also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.

Beispiel

$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

$L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: nicht äquivalent
4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$: äquivalent
5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$
   - Da $w_1 \in L$, aber $w_2 \notin L$,
     zeigt $w = \varepsilon$, dass die beiden nicht $\equiv_L$-äquivalent sind.

Beispiel

$A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$

$L = \langle \texttt{a*b*} \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt

Beispiele:

1. $w_1 = \texttt{aaa}$ und $w_2 = \texttt{a}$: äquivalent
2. $w_1 = \texttt{aaab}$ und $w_2 = \texttt{abb}$: äquivalent
3. $w_1 = \texttt{aa}$ und $w_2 = \texttt{abb}$: nicht äquivalent
4. $w_1 = \texttt{aba}$ und $w_2 = \texttt{babb}$: äquivalent
5. $w_1 = \texttt{ab}$ und $w_2 = \texttt{ba}$: nicht äquivalent

also drei Äquivalenzklassen

- $\langle \texttt{a*} \rangle$
- $\langle \texttt{a*bb*} \rangle$
- $\langle \texttt{(a|b)*ba(a|b)*} \rangle$

Die Nerode-Relation ist immer eine Äquivalenzrelation

Lemma

Für jede formale Sprache L ist $\equiv_L$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis

prüfe alle drei Eigenschaften

- Reflexivität: sehr einfach
- Symmetrie: sehr einfach
- Transitivität: einfach

Veträglichkeit: Beispiel Nerode-Äquivalenzen

$x \in A$ beliebig

$$f_x : A^* \to A^* : w \mapsto wx$$

Lemma

$\equiv_L$ ist mit f_x verträglich:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \equiv_L w_2 \longrightarrow w_1 x \equiv_L w_2 x$$

Beweis

- Anhängen von w an $w_1 x$ bzw. $w_2 x$ ist das Gleiche wie
- Anhängen von xw an w_1 bzw. w_2
- also …

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen

für jedes $x \in A$ ist $f_x : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich

Also ist

$$f'_x \colon A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

wohldefiniert.

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen

für jedes $x \in A$ ist $f_x : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich

Also ist

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

wohldefiniert.

Also ist

$$f' : A^*_{/\equiv_L} \times A \to A^*_{/\equiv_L} : f'([w], x) = [wx]$$

wohldefiniert.

Nerode-Äquivalenzen: Ausblick

Theorem. Hat $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen, dann ist (Z, z_0, A, f, F) mit

- $Z = A^*_{/\equiv_L}$
- $z_0 = [\varepsilon]$
- $f : Z \times A \to Z : f([w], x) = [wx]$
- $F = \{[w] \mid w \in L\}$

ein endlicher Akzeptor, der genau L akzeptiert.

Theorem. Wenn L regulär ist, dann hat $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen.

Theorem. Der so konstruierte Akzeptor

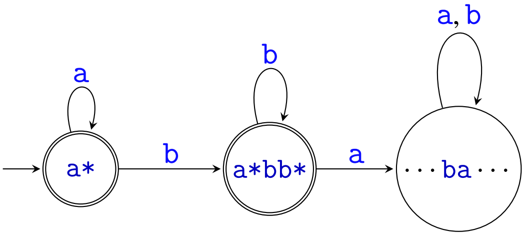
- hat die kleinstmögliche Anzahl von Zuständen und
- es gibt bis auf Isomorphie nur einen so kleinen Akzeptor.

Nerode-Äquivalenzen: Ausblick

Beispiel $L = \langle$`a*b*`$\rangle$ mit Äquivalenzklassen

- $\langle$`a*`$\rangle$
- $\langle$`a*bb*`$\rangle$
- $\langle$`(a|b)*ba(a|b)*`$\rangle$

Akzeptor



Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Antisymmetrische Relationen

$R \subseteq M \times M$ *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \land yRx \longrightarrow x = y$$

Beispiel Mengeninklusion:

- zum Beispiel $M = 2^{M'}$ Potenzmenge einer Menge M'
- Relation $R \subseteq M \times M$ mit

$$\begin{aligned} R &= \{(A, B) \mid A \subseteq M' \land B \subseteq M' \land A \subseteq B\} \\ &= \{(A, B) \mid A \in M \land B \in M \land A \subseteq B\} \end{aligned}$$

- R ist antisymmetrisch:

$$A \subseteq B \land B \subseteq A \longrightarrow A = B$$

Halbordnungen

$R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- transitiv

Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.

Halbordnungen

$R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- transitiv

Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.

Beispiel Mengeninklusion:

- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B \land B \subseteq A \longrightarrow A = B$
- $A \subseteq B \land B \subseteq C \longrightarrow A \subseteq C$

Halbordnungen

$R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn R

- reflexiv,
- antisymmetrisch und
- transitiv

Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine halbgeordnete Menge.

Beispiel Mengeninklusion:

- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B \land B \subseteq A \longrightarrow A = B$
- $A \subseteq B \land B \subseteq C \longrightarrow A \subseteq C$

im allgemeinen gibt es unvergleichbare Elemente:

- z. B. $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \nsubseteq \{1, 2, 3\}$

eine Halbordnung auf Wörtern — darauf bauen wir später noch auf

$M = A^*$

Relation $\sqsubseteq_p$ auf A^*:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \longleftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

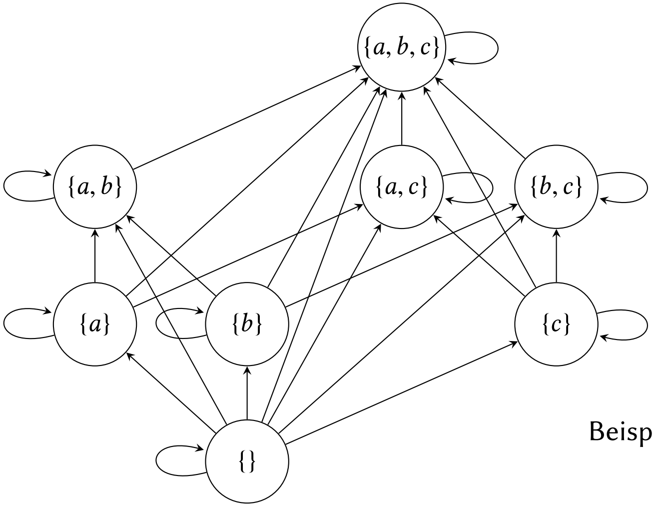
zum Beispiel im Duden:

- „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“

aber: $\sqsubseteq_p$ ist echte *Halb*ordnung

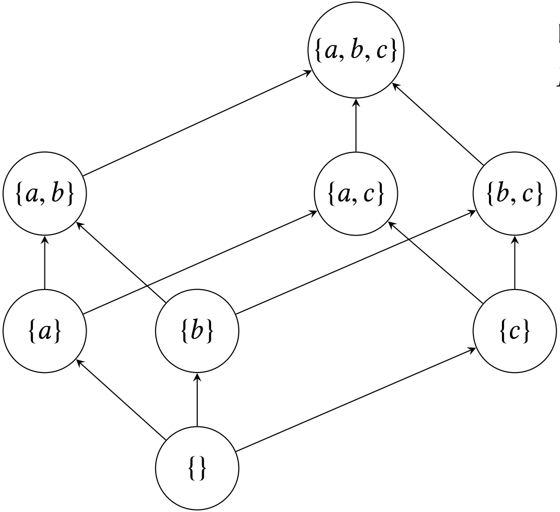
- keine Beziehung zwischen `Klausur` und `Übung`

Wenn man weiß, dass es eine Halbordnung ist, enthält der gesamte Graph Redundantes



Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

Wenn man weiß, dass es eine Halbordnung ist, genügt das Hassediagramm



Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

$H_R = (R \setminus I) \setminus (R \setminus I)^2$

Das Hassediagramm enthält «alles Wesentliche»

Wenn R Halbordnung auf einer endlichen Menge M ist,

dann kann man aus H_R das R wieder rekonstruieren:

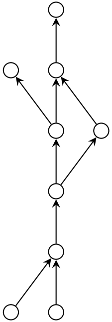
Das Hassediagramm enthält «alles Wesentliche»

Wenn R Halbordnung auf einer endlichen Menge M ist,

dann kann man aus H_R das R wieder rekonstruieren:

$$H_R^* = R$$

Minimale und maximale Elemente

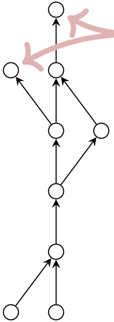


sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt maximales Element von T,
  wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

- $x \in T$ heißt minimales Element von T,
  wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Minimale und maximale Elemente

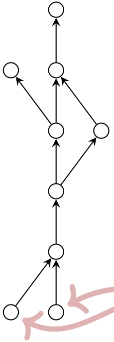


sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt maximales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

- $x \in T$ heißt minimales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

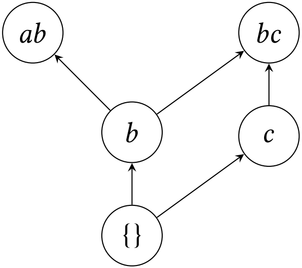
Minimale und maximale Elemente



sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt maximales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.
- $x \in T$ heißt minimales Element von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Beispiele minimaler und maximaler Elemente



Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

zwei maximale Elemente: ab und bc

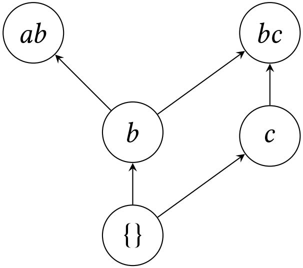
ein minimales Element: $\{\}$

Kleinste und größte Elemente

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt kleinstes Element von T,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in T$ heißt größtes Element von T,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Beispiele kleinster und größter Elemente

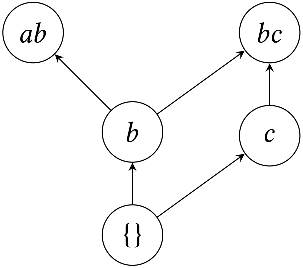


Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

kein größtes Element

kleinstes Element: $\{\}$

Beispiele kleinster und größter Elemente



Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

kein größtes Element

kleinstes Element: $\{\}$

Vorsicht bei unendlichen Halbordnungen

- u. U. genau ein minimales Element
- aber trotzdem kein kleinstes!

Das kleinste und das größte Element sind eindeutig

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

- T kann nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.

Beweis für Eindeutigkeit des kleinsten Elements

- seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
- dann ist $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
- und es ist $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,
- also wegen Antisymmetrie: $x_1 = x_2$

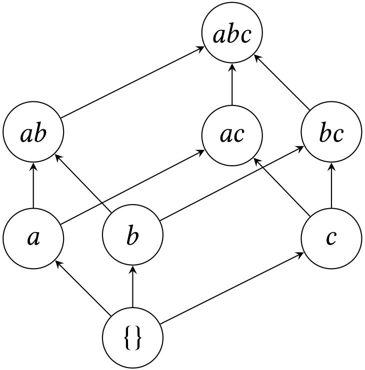
analog Eindeutigkeit des größten Elements

Untere und obere Schranken von T — unter Umständen auch außerhalb von T

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in M$ heißt obere Schranke von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
- $x \in M$ heißt untere Schranke von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

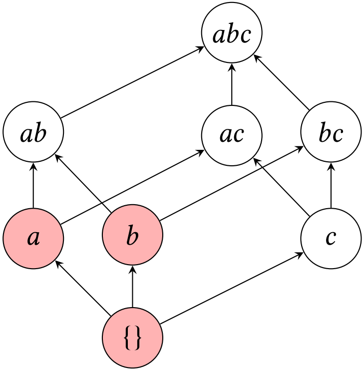
Untere und obere Schranken: Beispiele



$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}\ \}$

$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$

Untere und obere Schranken: Beispiele

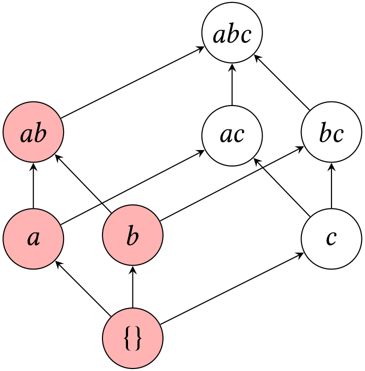


$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}\ \}$

- obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$

$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$

Untere und obere Schranken: Beispiele



$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}\ \}$

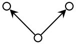
- obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$

$T = \{\ \{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\ \}$

- die gleichen oberen Schranken

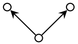
Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen

In  hat z. B. Grundmenge keine obere Schranke

Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen

In  hat z. B. Grundmenge keine obere Schranke

In $(\mathbb{N}_0, \leq)$ hat die Grundmenge keine obere Schranke.

Supremum und Infimum

Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das Supremum von T

- Schreibweisen $\bigsqcup T$ oder $\sup(T)$

Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das Infimum von T.

- brauchen wir hier nicht

Supremum und Infimum

Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das Supremum von T

- Schreibweisen $\bigsqcup T$ oder $\sup(T)$

Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das Infimum von T.

- brauchen wir hier nicht

Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge müssen nicht existieren

- weil gar keine oberen Schranken vorhanden oder
- weil von den oberen Schranken keine die kleinste ist

Supremum und Infimum: Beispiele

Bei Halbordnungen $(2^{M'}, \subseteq)$ existieren Suprema immer:

- Supremum von $T \subseteq 2^{M'}$ ist die Vereinigung aller Teilmengen von M, die in T liegen

Beispiel für das Beispiel:

- $M' = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
- also ist $M = 2^{M'}$ die Menge aller formalen Sprachen $L \subseteq M'$
- für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $L_i = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^j \mid j \leq i\}$
  - $L_0 = \{\varepsilon\}$
  - $L_1 = \{\varepsilon, \mathtt{ab}\}$
  - $L_2 = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\}$
  - $\ldots$
- sei $T = \{L_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- dann ist $\bigsqcup T = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$

Aufsteigende Ketten

aufsteigende Kette

- abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ von Elementen
- mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
- kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots$$

Aufsteigende Ketten

aufsteigende Kette

- abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ von Elementen
- mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
- kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots$$

Beispiel: $(2^{\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*}, \subseteq)$

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabbb}\} \ldots$$

Vollständige Halbordnungen

Eine Halbordnung heißt vollständig, wenn

- sie ein kleinstes Element $\bot$ hat und
- jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ ein Supremum $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.

Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$

- kleinstes Element $\{\}$
- Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ist $\bigcup T_i$.

Vollständige Halbordnungen

Eine Halbordnung heißt vollständig, wenn

- sie ein kleinstes Element $\bot$ hat und
- jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ ein Supremum $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.

Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$

- kleinstes Element $\{\}$
- Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ist $\bigcup T_i$.

aufsteigende Ketten, die konstant werden, also
$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots$

Vollständige Halbordnungen

Eine Halbordnung heißt vollständig, wenn

- sie ein kleinstes Element $\bot$ hat und
- jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ ein Supremum $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.

Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$

- kleinstes Element $\{\}$
- Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ist $\bigcup T_i$.

aufsteigende Ketten, die konstant werden, also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots$

- haben immer Supremum, nämlich x_k

Vollständige Halbordnungen: weitere (Nicht-)Beispiele

$(\mathbb{N}_0, \leq)$ ist *keine* vollständige Halbordung

- unbeschränkt wachsende aufsteigende Ketten wie z. B. $0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots$ besitzen kein Supremum in $\mathbb{N}_0$.

ergänze Element u „über" allen Zahlen:

- $N = \mathbb{N}_0 \cup \{u\}$ und
- $x \sqsubseteq y \longleftrightarrow \big(x, y \in \mathbb{N}_0 \land x \leq y\big) \lor (y = u)$
- also $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq u$

später noch nützlich

- $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ und
- $$x \sqsubseteq y \longleftrightarrow \big(x, y \in \mathbb{N}_0 \land x \leq y\big) \lor \big(x \in \mathbb{N}_0 \cup \{u_1\} \land y = u_1\big) \lor y = u_2$$
- also $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq u_1 \sqsubseteq u_2$

Monotone Abbildungen

$(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnete Menge

Abbildung $f : M \to M$ monoton, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \longrightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Monotone Abbildungen

$(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnete Menge

Abbildung $f : M \to M$ monoton, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \longrightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Beispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x + 1$

- $x \leq y \longrightarrow x + 1 \leq y + 1$

Nichtbeispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x \bmod 5$

- $3 \leq 10$, aber $f(3) = 3 \not\leq 0 = f(10)$.

Stetige Abbildungen

$(D, \sqsubseteq)$ sei vollständige Halbordnung

monotone Abbildung $f : D \to D$ heißt stetig,
wenn für jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

$$f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$$

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben

Abbildung $f : N' \to N'$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_1 \\ u_2 & \text{falls } x = u_2 \end{cases}$$

ist stetig.

warum?

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad \text{(für } j = 1,2) \end{cases}$$

zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

1. Die Kette wird nicht konstant.

2. Die Kette wird konstant.

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

1. Die Kette wird nicht konstant.
   - alle $x_i \in \mathbb{N}_0$, die Kette wächst unbeschränkt

2. Die Kette wird konstant.

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

1. Die Kette wird nicht konstant.
   - alle $x_i \in \mathbb{N}_0$, die Kette wächst unbeschränkt
   - ebenso die Kette der Funktionswerte

2. Die Kette wird konstant.

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

1. Die Kette wird nicht konstant.
   - alle $x_i \in \mathbb{N}_0$, die Kette wächst unbeschränkt
   - ebenso die Kette der Funktionswerte
   - beide Ketten Supremum u_1, $\qquad f(u_1) = u_1$
     also $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$
2. Die Kette wird konstant.

Stetige Abbildungen: Beispiel 1

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad \text{(für } j = 1, 2) \end{cases}$$

zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$

1. Die Kette wird nicht konstant.
   - alle $x_i \in \mathbb{N}_0$, die Kette wächst unbeschränkt
   - ebenso die Kette der Funktionswerte
   - beide Ketten Supremum u_1, $\qquad f(u_1) = u_1$
     also $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$
2. Die Kette wird konstant.
   - Fall klar?

Stetige Abbildungen: Beispiel 2

$N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben

Abbildung $g : N' \to N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_2 & \text{falls } x \in \{u_1, u_2\} \end{cases}$$

ist *nicht* stetig

Stetige Abbildungen: Beispiel 2

$N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben

Abbildung $g : N' \to N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_2 & \text{falls } x \in \{u_1, u_2\} \end{cases}$$

ist *nicht* stetig

Unterschied zu f: $g(u_1) = u_2$

betrachte Kette mit $x_i = i$, also $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq \cdots$

$g(\bigsqcup_i x_i) = g(u_1) = u_2 \neq u_1 = \bigsqcup_i g(x_i)$

Fixpunktsatz

Satz

- Es sei $f : D \to D$ eine monotone, stetige Abbildung auf einer vollständigen Halbordnung $(D, \sqsubseteq)$ mit kleinstem Element $\bot$.
- Elemente $x_i \in D$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= \bot \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : x_{i+1} &= f(x_i) \end{aligned}$$

- Dann gilt:
  1. Die x_i bilden eine Kette: $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$.
  2. Supremum $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt von f, also $f(x_f) = x_f$.
  3. x_f ist der kleinste Fixpunkt von f: $f(y_f) = y_f \longrightarrow x_f \sqsubseteq y_f$.

Anwendung: Semantik von Programmiersprachen

Fixpunktsatz: Beweis

Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
vollständige Induktion:

- $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \bot$ das kleinste Element
- wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

Fixpunktsatz: Beweis

Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
vollständige Induktion:

- $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \bot$ das kleinste Element
- wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$

- da f stetig: $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$
- Folge der x_{i+1} gleich Folge der x_i ohne erstes Element $\bot$
- also gleiches Supremum x_f (klar?) also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
- also ist $f(x_f) = x_f$

Fixpunktsatz: Beweis

Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
vollständige Induktion:

- $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \bot$ das kleinste Element
- wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$

- da f stetig: $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$
- Folge der x_{i+1} gleich Folge der x_i ohne erstes Element $\bot$
- also gleiches Supremum x_f (klar?) also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
- also ist $f(x_f) = x_f$

Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.

- Induktion: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
- also y_f eine obere Schranke der Kette
- also gilt für kleinste obere Schranke $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Halbordnungen sind
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv
- vollständige Halbordnungen
  - jede aufsteigende Kette hat Supremum
- stetige Abbildungen: $f(\bigsqcup x_i) = \bigsqcup f(x_i)$
- Fixpunktsatz

Das sollten Sie üben:

- Nachweis der Eigenschaften von (vollständigen) Halbordnungen
- Beweise einfacher Aussagen
- an ungewohnte Eigenschaften von Halbordnungen gewöhnen
  - Unendlichkeit lässt grüßen

Wo sind wir?

Äquivalenzrelationen

Kongruenzrelationen

Äquivalenzrelation von Nerode

Halbordnungen

Ordnungen

Totale Ordnung — keine unvergleichbaren Elemente

Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnung oder genauer totale Ordnung, wenn

- R Halbordnung ist
- und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \lor yRx$$

Totale Ordnung — keine unvergleichbaren Elemente

Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnung oder genauer totale Ordnung, wenn

- R Halbordnung ist
- und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \lor yRx$$

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0, \leq)$
- $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit
  $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \longleftrightarrow x_1 < y_1 \lor (x_1 = y_1 \land x_2 \leq y_2)$
- $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $\sqsubseteq_1$ „wie im Wörterbuch“

Totale Ordnungen auf A^*

Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \longleftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

ist *keine* totale Ordnung

- z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar

Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

Totale Ordnungen auf A^*

Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \longleftrightarrow \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

ist *keine* totale Ordnung

- z. B. sind $\texttt{a}$ und $\texttt{b}$ unvergleichbar

Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

jedenfalls totale Ordnung $\sqsubseteq_A$ auf A nötig, z. B. $\texttt{a} \sqsubseteq_A \texttt{b}$

dann mehrere Möglichkeiten …

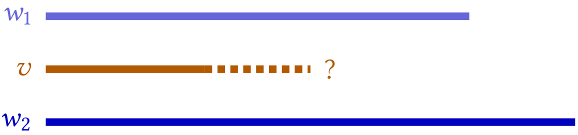
`Milchstraße` — `Milch` — `Milchreis`
— in welcher Reihenfolge stehen sie im Wörterbuch?

Milchstraße — Milch — Milchreis
— in welcher Reihenfolge stehen sie im Wörterbuch?

- Milch
- Milchreis
- Milchstraße

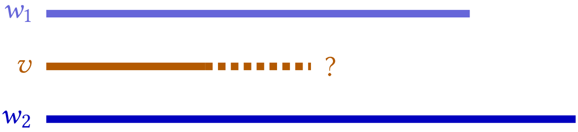
Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

Suche längstes gemeinsames Präfix v



Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

Suche längstes gemeinsames Präfix v



- ein gemeinsames Präfix gibt es immer: ε
- stets $|v| \leq \min(|w_1|, |w_2|)$
- es gibt ein längstes
- das längste ist eindeutig bestimmt

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

drei Möglichkeiten

- $|v| = |w_1| < |w_2|$
- $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$
- $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

drei Möglichkeiten

- $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
- $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$
- $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

drei Möglichkeiten

- $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
- $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
- $|w_1| > |w_2| = |v|$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

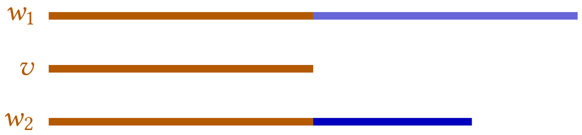
1. Fall: $|v| = \min(|w_1|, |w_2|)$

drei Möglichkeiten

- $|v| = |w_1| < |w_2|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
- $|v| = |w_1| = |w_2| = |v|$: definiere $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
- $|w_1| > |w_2| = |v|$: definiere $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$

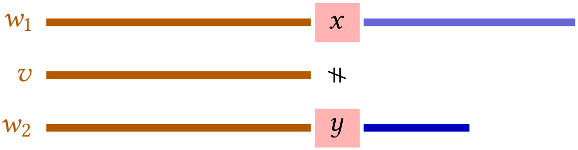
Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$



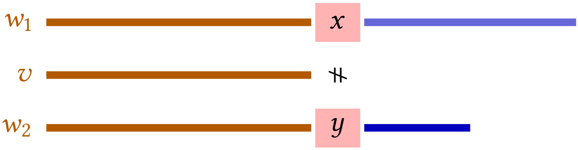
Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$



Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

2. Fall: $|v| < \min(|w_1|, |w_2|)$



- wenn $x \sqsubseteq_A y$ dann $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
- wenn $y \sqsubseteq_A x$ dann $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ «erster Art» — die im Wörterbuch

für $w_1, w_2 \in A^*$ sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix so, dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.

Fallunterscheidung:

1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
   Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
2. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
   - $x \neq y$ und
   - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

   dann $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \longleftrightarrow x \sqsubseteq_A y$

Beispiele

1. „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
2. „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$

„harmlos“ bei nur endlich vielen Wörtern

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &\sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} &\sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ &\sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$

„harmlos“ bei nur endlich vielen Wörtern

$$\begin{aligned} \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} \sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

nicht ganz so harmlos für A^*

- $\varepsilon \sqsubseteq_1 \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \sqsubseteq_1 \cdots$ hat kein Supremum:
  - jedes Wort, das mindestens ein b enthält, ist obere Schranke,
  - zu jeder oberen Schranke w ist $\mathtt{a}^{|w|}\mathtt{b}$ ist eine echt kleine obere Schranke (weil w ein b enthält)
- $\mathtt{b} \sqsupseteq_1 \mathtt{ab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaaab} \sqsupseteq_1 \cdots$ hat kein Infimum
- $(A^*, \sqsubseteq_1)$ ist also keine vollständige Halbordnung

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$ «zweiter Art»

andere lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$ auf A^*:
$w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ gilt genau dann, wenn

- entweder $|w_1| < |w_2|$
- oder $|w_1| = |w_2|$ und $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ gilt.

für $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ mit $\mathtt{a} \sqsubseteq \mathtt{b}$ beginnt Ordnung so

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\sqsubseteq_2 \mathtt{a} \sqsubseteq_2 \mathtt{b} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aa} \sqsubseteq_2 \mathtt{ab} \sqsubseteq_2 \mathtt{ba} \sqsubseteq_2 \mathtt{bb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaaa} \quad \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbbb} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Die lexikografischen Ordnungen $\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ sind total

$\sqsubseteq_1$ auf Menge A^n totale Ordnung (für festes n)

- Halbordnung: nachprüfen …
- für verschiedene Wörter gleicher Länge niemals $w_1 = v$ oder $w_2 = v$.
- da $\sqsubseteq_A$ als total vorausgesetzt wird, ist bei $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$ stets $x \sqsubseteq_A y$ oder $y \sqsubseteq_A x$
- also stets $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ oder $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$.

also $\sqsubseteq_2$ auf A^* totale Ordnung

$\sqsubseteq_1$ für verschieden lange Wörter: nachprüfen …

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- totale Ordnungen sind
  - Halbordnungen
  - ohne unvergleichbare Elemente
- Anwendung an diversen Stellen in der Informatik
  - z. B. Semantik, Testmuster, …

Das sollten Sie üben:

- Nachweis der Eigenschaften von totalen Ordnungen
- Beweise einfacher Aussagen
- an ungewohnte Eigenschaften von Ordnungen gewöhnen (Unendlichkeit …)