$\in L_3$ ist.95Eine abstraktere Darstellung der "'Begründung"', warum `(())()()` $\in L_3$ ist.figure.caption.21

, und .182Graphische Darstellung der Zustandsübergänge des Getränkeautomaten für die drei Eingabesymbole `1`, `R` und `Z`.figure.caption.57

und .183Graphische Darstellung der Zustandsübergänge des Getränkeautomaten für die Eingabesymbole `C` und `O`.figure.caption.58

w$_2$190Teil eines Akzeptors für Wörter der Form w_1`ababb`$w_2$figure.caption.63

w$_2$191Der vollständige Akzeptor für alle Wörter der Form w_1`ababb`$w_2$figure.caption.64

212Akzeptierende Berechung der Turingmaschine aus Abbildung darkblue20.3Eine Turingmaschine zur Palindromerkennung; f_+ sei der einzige akzeptierende Zustandfigure.caption.70 für Eingabe `abba`figure.caption.71

13 PRÄDIKATENLOGIK

In Kapitel 5 haben wir Syntax und Semantik aussagenlogischer Formeln kennengelernt. Nun widmen wir uns der sogenannten *Prädikatenlogik erster Stufe*. Dabei wird auch Aussagenlogik wieder eine Rolle spielen.

13.1 SYNTAX PRÄDIKATENLOGISCHER FORMELN

Prädikatenlogische Formeln sind komplizierter aufgebaut als aussagenlogische. Man geht drei Schritten vor:

- Zunächst definiert man sogenannte *Terme*, die aus Konstanten, Variablen und Funktionssymbolen zusammengesetzt werden.
- Mit Hilfe von Relationssymbolen und Termen konstruiert man dann *atomare Formeln*.
- Aus ihnen werden mittels der schon bekannten aussagenlogischen Konnektive und zweier sogenannter Quantoren allgemeine *prädikatenlogische Formeln* gebildet.

Für die Definition von Termen sind drei Alphabete gegeben:

- ein Alphabet $Const_{PL}$ sogenannter *Konstantensymbole*, notiert als $\mathtt{c}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$) oder kurz als $\mathtt{c}$, $\mathtt{d}$. *Konstantensymbol*
- ein Alphabet Var_{PL} sogenannter *Variablensymbole*, notiert als $\mathtt{x}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$) oder kurz als $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$, $\mathtt{z}$. *Variablensymbol*
- ein Alphabet Fun_{PL} sogenannter *Funktionsymbole*, notiert als $\mathtt{f}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$) oder kurz als $\mathtt{f}$, $\mathtt{g}$, $\mathtt{h}$. Für jedes $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$ bezeichne $\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i) \in \mathbb{N}_+$ die *Stelligkeit* (oder *Arität*) des Funktionssysmbols. *Funktionsymbol* *Stelligkeit* *Arität*

Das Alphabet A_{Ter} der Symbole, aus denen Terme zusammengesetzt sind, umfasst neben den oben genannten außerdem Symbole „Klammer auf", „Komma" und „Klammer zu":

$$A_{Ter} = \{\mathtt{(}, \mathtt{,}, \mathtt{)}\} \cup Const_{PL} \cup Var_{PL} \cup Fun_{PL} \; .$$

Der syntaktische Aufbau von Termen wird mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik $(N_{Ter}, A_{Ter}, \mathtt{T}, P_{Ter})$ definiert. Dazu sei nun m die größte Stelligkeit, die ein Funktionssymbol in Fun_{PL} oder ein Relationssymbol in Rel_{PL} (siehe nächste Seite) hat. Als $m+1$ Nichtterminalsymbole benutzen wir

$$N_{Ter} = \{\, \mathtt{T} \,\} \cup \{\, \mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m \,\} \; .$$

Die folgenden Produktionen erzeugen dann zusammen die Terme:

$$\begin{aligned}
\mathtt{L}_{i+1} &\to \mathtt{L}_i\,\mathtt{,}\,\mathtt{T} && \text{für jedes } i \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } i < m \\
\mathtt{L}_1 &\to \mathtt{T} \\
\mathtt{T} &\to \mathtt{c}_i && \text{für jedes } \mathtt{c}_i \in \mathit{Const}_{PL} \\
\mathtt{T} &\to \mathtt{x}_i && \text{für jedes } \mathtt{x}_i \in \mathit{Var}_{PL} \\
\mathtt{T} &\to \mathtt{f}_i\mathtt{(}\mathtt{L}_{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)}\mathtt{)} && \text{für jedes } \mathtt{f}_i \in \mathit{Fun}_{PL}
\end{aligned}$$

Aus $\mathtt{T}$ kann man alle Terme ableiten und aus jedem $\mathtt{L}_i$ Listen mit genau i durch Kommata getrennten Termen. Wir bezeichnen die Menge aller Terme auch mit L_{Ter}.

Grundterm

Ein Term heißt *Grundterm*, wenn in ihm keine Variablensymbole vorkommen, wenn also bei seiner Ableitung niemals eine der Produktionen $\mathtt{T} \to \mathtt{x}_i$ benutzt wird.

Wenn `f` ein zweistelliges und `g` ein einstelliges Funktionssymbol sind, dann sind zum Beispiel die folgenden Ausdrücke Terme:

- `c`
- `y`
- `g(x)`
- `f(x,g(z))`
- `f(c,g(g(z)))`

Syntaktisch falsch sind dagegen

- `xy`
- `c(x)`
- `f)x,y(`
- `g(c,c,c,x)`

und so weiter.

atomare Formel
Relationsymbol

Atomare Formeln werden aus Relationssymbolen und Termen zusammengesetzt. Dazu wird ein Alphabet Rel_{PL} sogenannter *Relationsymbole* festgelegt.

- Es enthält zum einen Symbole, die wir in der Form $\mathtt{R}_i$ notieren (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$) oder kurz als $\mathtt{R}, \mathtt{S}$. Für jedes $\mathtt{R}_i \in \mathit{Rel}_{PL}$ bezeichne $\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i) \in \mathbb{N}_+$ die *Stelligkeit* (oder *Arität*) des Relationssysmbols.

Stelligkeit
Arität

- Außerdem enthalte Rel_{PL} *immer* ein Symbol, für das wir $\doteq$ schreiben, also ein „Gleichheitszeichen mit einem Punkt darüber“. Wie man an der Grammatik weiter unten sehen wird, ist $\doteq$ ein zweistelliges Relationssymbol, das immer infix notiert wird. (Diese Notation ist aus dem Skript zur Vorlesung „Formale Systeme“ übernommen.)

Das Alphabet A_{Rel} der Symbole, aus denen atomare Formeln zusammengesetzt sind, umfasst neben den Symbolen für Terme zusätzlich nur die Relationssymbole:

$$A_{Rel} = A_{Ter} \cup \mathit{Rel}_{PL} \; .$$

Für die kontextfreie Grammatik $(N_{Rel}, A_{Rel}, \mathtt{A}, P_{Rel})$, die atomare Formeln erzeugt, sei wieder m die größte Stelligkeit, die ein Funktions- oder ein Relationssymbol in Fun_{PL} bzw. Rel_{PL} haben. Dann ist

$$N_{Rel} = \{\, \mathtt{A}, \mathtt{T} \,\} \cup \{\, \mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \le m \,\} = \{\, \mathtt{A} \,\} \cup N_{Ter} \; .$$

Die Produktionenmenge für atomare Formeln erweitert die für Terme wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{Rel} = P_{Ter} &\cup \{ \mathtt{A} \to \mathtt{R}_i(\mathtt{L}_{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}) \mid \text{ für jedes } \mathtt{R}_i \in Rel_{PL} \} \\ &\cup \{ \mathtt{A} \to \mathtt{T} \doteq \mathtt{T} \} \,. \end{aligned}$$

Die aus $\mathtt{A}$ ableitbaren Wörter sind die atomaren Formeln. Die Menge aller atomaren Formeln bezeichnen wir mit L_{Rel}.

Wenn $\mathtt{f}$ ein zweistelliges und $\mathtt{g}$ ein einstelliges Funktionssymbol sind, $\mathtt{R}$ ein dreistelliges und $\mathtt{S}$ ein einstelliges Relationssymbol, dann sind zum Beispiel die folgenden Wörter atomare Formeln:

- $\mathtt{S(c)}$
- $\mathtt{R(y,c,g(x))}$
- $\mathtt{g(x)} \doteq \mathtt{f(x,g(z))}$

Syntaktisch falsch sind dagegen

- $\mathtt{x} \doteq \mathtt{y} \doteq \mathtt{z}$
- $\mathtt{R} \doteq \mathtt{R}$
- $\mathtt{S(x)} \doteq \mathtt{S(x)}$
- $\mathtt{R(x,y)}$
- $\mathtt{f(S(x))}$
- $\mathtt{R(S(x),x,x)}$
- $\mathtt{(S(S))(x)}$
- $\mathtt{R)x,y(}$
- $\mathtt{gRf()}$
- $\mathtt{x} \to \mathtt{R(z)}$
- $\mathtt{x} \vee \mathtt{y}$

und so weiter.

Das Alphabet A_{For} der Symbole, aus denen prädikatenlogische Formeln zusammengesetzt sind, umfasst neben den Symbolen für atomare Formeln zusätzlich die aussagenlogischen Konnektive und den sogenannten *Allquantor* $\forall$ und den sogenannten *Existenzquantor*: *Allquantor* *Existenzquantor*

$$A_{For} = A_{Rel} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists \} \,.$$

Für die kontextfreie Grammatik $(N_{For}, A_{For}, \mathtt{F}, P_{For})$ ist

$$N_{For} = \{ \mathtt{F} \} \cup N_{Rel}$$

Die Produktionenmenge für prädikatenlogische Formeln erweitert die für atomare Formeln wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{For} = P_{Rel} &\cup \{ \mathtt{F} \to \mathtt{A} \} \\ &\cup \{ \mathtt{F} \to (\neg\mathtt{F}), \mathtt{F} \to (\mathtt{F} \wedge \mathtt{F}), \mathtt{F} \to (\mathtt{F} \vee \mathtt{F}), \mathtt{F} \to (\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \} \\ &\cup \{ \mathtt{F} \to (\forall \mathtt{x}_i \mathtt{F}) \mid \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \} \,. \end{aligned}$$

Die aus $\mathtt{F}$ ableitbaren Wörter sind die prädikatenlogischen Formeln. Die Menge aller prädikatenlogischen Formeln bezeichnen wir mit L_{For}.

Wie bei aussagenlogischen Formeln stehe für alle Formeln G und H das Wort $(G \leftrightarrow H)$ für $((G \to H) \wedge (H \to G))$. Außerdem schreiben wir als weitere Abkürzung $(\exists \mathtt{x}_i F)$ statt $(\neg(\forall \mathtt{x}_i (\neg F)))$. Das Zeichen $\exists$ heißt *Existenzquantor*. *Existenzquantor*

Und bei größeren Formeln verliert man wegen der vielen Klammern leicht den Überblick. Deswegen erlauben wir ganz analog zum Fall aussagenlogischer Formeln folgende Klammereinsparungsregeln. (Ihre „offizielle" Syntax bleibt die gleiche!)

- Die äußerten umschließenden Klammern darf man immer weglassen. Zum Beispiel ist $\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}$ die Kurzform von $(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q})$.
- Wenn ohne jede Klammern zwischen mehrere Aussagevariablen immer das gleiche Konnektiv steht, dann bedeute das „implizite Linksklammerung". Zum Beispiel ist $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \wedge \mathtt{R}$ die Kurzform von $((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \wedge \mathtt{R})$.
- Wenn ohne jede Klammern zwischen mehrere Aussagevariablen verschiedene Konnektive oder/und Quantoren stehen, dann ist von folgenden „Bindungsstärken" auszugehen:
  a) $\forall$ und $\exists$ binden am stärksten
  b) $\neg$ bindet am zweitstärksten
  c) $\wedge$ bindet am drittstärksten
  d) $\vee$ bindet am viertstärksten
  e) $\rightarrow$ bindet am fünftstärksten
  f) $\leftrightarrow$ bindet am schwächsten

  Zum Beispiel ist $\forall \mathtt{x} \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{S}(\mathtt{x})$ die Kurzform von $(\forall \mathtt{x} \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \wedge \mathtt{S}(\mathtt{x})$.

13.2 SEMANTIK PRÄDIKATENENLOGISCHER FORMELN

Interpretation
Universum

Es seien Alphabete $Const_{PL}$, Fun_{PL} und Rel_{PL} gegeben. Eine dazu passende *Interpretation* (D, I) ist durch folgende Bestandteile festgelegt:

- eine nichtleere Menge D, das sogenannte *Universum* der Interpretation,
- für jedes $\mathtt{c}_i \in Const_{PL}$ ein Wert $I(\mathtt{c}_i) \in D$,
- für jedes $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$ eine Abbildung $I(\mathtt{f}_i) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)} \rightarrow D$ und
- für jedes $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$ eine Relation $I(\mathtt{R}_i) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}$.

Variablenbelegung

Zu jedem Alphabet Var_{PL} und einer Interpretation (D, I) ist eine *Variablenbelegung* eine Abbildung $\beta : Var_{PL} \rightarrow D$.

Sind eine Interpretation (D, I) und eine Variablenbelegung β festgelegt, so kann man

- jedem Term einen Wert aus D und
- jeder Formel einen Wahrheitswert zuordnen.

Die entsprechende Abbildung $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \rightarrow D \cup \mathbb{B}$ definieren wir schrittweise induktiv zunächst für Terme und anschließend für Formeln wie folgt.

Für jeden Term $t \in L_{Ter}$ und alle Terme $t_1, \ldots, t_k \in L_{Ter}$ sei

$$val_{D,I,\beta}(t) = \begin{cases} \beta(\mathtt{x}_i), & \text{falls } t = \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \\ I(\mathtt{c}_i), & \text{falls } t = \mathtt{c}_i \in Const_{PL} \\ I(\mathtt{f}_i)(val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_k)), & \text{falls } t = \mathtt{f}_i(t_1, \ldots, t_k) \end{cases}$$

Wie man sieht, ist für jeden Term t der Funktionswert $val_{D,I,\beta}(t)$ definiert und ein Element von D. Wir haben uns an dieser Stellen erlaubt, Pünktchen-Notation zu verwenden. Das hätte man durch zusätlichen Aufwand vermeiden können, der das Ganze aber schlechter lesbar gemacht hätte. Deshalb machen wir diese Ausnahme hier ... und gleich noch einmal.

Jede atomare Formel ist entweder von der Form $\mathtt{R}_i(t_1, \dots, t_k)$ für Terme $(t_1, \dots, t_k) \in L_{Ter}^{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}$ oder von der Form $t_1 \doteq t_2$ für Terme $(t_1, t_2) \in L_{Ter}^2$. Für sie wird festgelegt:

$$val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}_i(t_1, \dots, t_k)) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_k)) \in I(\mathtt{R}_i) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \dots, val_{D,I,\beta}(t_k)) \notin I(\mathtt{R}_i) \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(t_1 \doteq t_2) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) = val_{D,I,\beta}(t_2) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) \neq val_{D,I,\beta}(t_2) \end{cases}$$

Damit muss nur noch für nicht-atomare Formeln F definiert werden, was $val_{D,I,\beta}(F)$ sein soll. Falls F von einer der Formen ist, die wir schon aus der Aussagenlogik kennen, sei $val_{D,I,\beta}(F)$ dementsprechend definiert. Zum Beispiel sei für alle prädikatenlogischen Formeln G und H festgelegt: $val_{D,I,\beta}(H_1 \wedge H_2) = b_\wedge(val_{D,I,\beta}(H_1), val_{D,I,\beta}(H_2))$.

Damit bleibt nur noch, für jede Formel F zu definieren, was $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i F)$ sein soll. Dafür führen wir noch folgende Hilfsdefinition ein. Für jede Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$, jedes $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$ und jedes $d \in D$ sei

$$\beta_{\mathtt{x}_i}^d : Var_{PL} \to D : \mathtt{x}_j \mapsto \begin{cases} \beta(\mathtt{x}_j) & \text{falls } j \neq i \\ d & \text{falls } j = i \end{cases}$$

diejenige Variablenbelegung, die mit β für alle Variablen ungleich $\mathtt{x}_i$ übereinstimmt, und für $\mathtt{x}_i$ den Wert d vorschreibt.

Damit ist dann

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i F) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta_{\mathtt{x}_i}^d \text{ gilt: } val_{D,I,\beta'}(F) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann sich überlegen, dass dann auch gilt:

$$val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x}_i F) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für mind. ein } d \in D \text{ und } \beta' = \beta_{\mathtt{x}_i}^d \text{ gilt: } val_{D,I,\beta'}(F) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine prädikatenlogische Formel F heißt *allgemeingültig*, wenn für jede passende Interpretation (D, I) und jede passende Variablenbelegung β gilt: $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$.

allgemeingültige Formel

Eine einfache Methode, um zu allgemeingültigen Formeln zu gelangen, besteht darin, eine aussagenlogische Tautologie G zu nehmen und für jede in ihr vorkommende Aussagevariable $\mathtt{P}_i$ eine beliebige prädikatenlogische Formel G_i und dann in G alle Vorkommen von $\mathtt{P}_i$ syntaktisch durch G_i zu ersetzen. Wir wollen so entstehende Formeln als prädikatenlogische Tautologien bezeichnen.

Aber es gibt noch andere allgemeingültige prädikatenlogische Formeln. Ein einfaches Beispiel ist die Formel

$$(t_1 \doteq t_2) \rightarrow (t_2 \doteq t_1)\,,$$

andere sind z. B. von der Form

$$(\forall \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H)) \rightarrow ((\forall \mathtt{x}_i\, G) \rightarrow (\forall \mathtt{x}_i\, H))$$

für beliebige prädikatenlogische Formeln G und H.

Modell einer Formel

Modell einer Formelmenge

Ist (D, I) eine Interpretation für eine prädikatenlogische Formel G, dann nennen wir (D, I) ein *Modell* von G, wenn für jede Variablenbelegung β gilt, dass $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ ist. Ist (D, I) eine Interpretation für eine Menge Γ prädikatenlogischer Formeln, dann nennen wir (D, I) ein *Modell* von Γ, wenn (D, I) Modell jeder Formel $G \in \Gamma$ ist.

Ist Γ eine Menge prädikatenlogischer Formeln und G ebenfalls eine, so schreibt man auch genau dann $\Gamma \models G$, wenn jedes Modell von Γ auch Modell von G ist. Enthält $\Gamma = \{H\}$ nur eine einzige Formel, schreibt man einfach $H \models G$. Ist $\Gamma = \{\}$ die leere Menge, schreibt man einfach $\models G$. Die Bedeutung soll in diesem Fall sein, dass G für *alle* Interpretationen überhaupt wahr ist, d. h. dass G allgemeingültig ist.

Als Beispiel betrachten wir die Formel G

$$\forall \mathtt{x}\ \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x}$$

und mehrere Interpretationen:

- Es sei $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$ und $I(\mathtt{f})$ die Addition von Zahlen. Dann ist (D, I) ein Modell der Formel, denn anschaulich bedeutet G dann: Für jede nichtnegative ganze Zahl x ist $x + 0 = x$.

  Genauer muss man sich fragen, ob für jedes β gilt: $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$. Dazu muss man für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ und $\beta' = \beta_{\mathtt{x}}^{d}$ prüfen, ob $val_{D,I,\beta'}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x}) = \mathbf{w}$ ist. Das ist genau dann der Fall, falls $val_{D,I,\beta'}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c})) = val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})$ ist.

  Die linke Seite ist $I(\mathtt{f})(\beta'(\mathtt{x}), I(\mathtt{c})) = \beta'(\mathtt{x}) + 0 = \beta'(\mathtt{x})$, was gerade gleich der rechten Seite ist.
- Ein anderes Modell von G erhält man, wenn $D = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$, $I(\mathtt{c}) = \varepsilon$ und $I(\mathtt{f})$ die Konkatenation von Wörtern ist.

- Ist dagegen $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$ und $I(\mathtt{f})$ die Multiplikation von Zahlen, dann liegt kein Modell für G vor, denn über den nichtnegativen ganzen Zahlen ist *nicht* stets $x \cdot 0 = x$.

Betrachtet man andererseits die Formel $\forall\mathtt{x}\ \forall\mathtt{y}\ \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{f(y,x)}$, dann ist die erste der obigen Interpretationen wieder ein Modell (weil die Addition von Zahlen kommutativ ist), die zweite Interpretation ist aber kein Modell (weil die Konkatenation von Wörtern nicht kommutativ ist).

13.3 FREIE UND GEBUNDENE VARIABLENVORKOMMEN UND SUBSTITUTIONEN

Dieser Abschnitt ist sehr technisch. Wofür das alles nötig ist, und dass sich der Aufwand tatsächlich lohnt, werden wir in späteren Abschnitten dieses Kapitels und auch in weiteren Kapiteln der Vorlesung sehen. Bis dahin müssen Sie sich beim Lesen etwas gedulden.

Wenn in einer prädikatenlogischen Formel G in einem Term eine Variable $\mathtt{x}$ steht, dann spricht man auch von einem *Vorkommen* der Variablen $\mathtt{x}$ in G. (Die Anwesenheit einer Variablen unmittelbar hinter einem Quantor zählt *nicht* als Vorkommen.)

Vorkommen einer Variablen

Die gleiche Variable kann natürlich an mehreren Stellen in G vorkommen. Genauer unterscheidet man sogenannte *freie* und *gebundene* Vorkommen von Variablen in G. Außerdem definiert man die Menge $\mathrm{fv}(G)$ der frei in G vorkommenden Variablen und die Menge $\mathrm{bv}(G)$ der gebunden in G vorkommenden Variablen. Diese Konzepte sind wie folgt definiert.

freies Vorkommen
gebundenes Vorkommen

Für jede Formel G, die atomar ist, sind alle Vorkommen von Variablen frei und es ist $\mathrm{bv}(G) = \{\}$ und $\mathrm{fv}(G)$ die Menge aller in G an mindestens einer Stelle vorkommenden Variablen.

Für jede Formel G der Form $\neg H$ ist $\mathrm{bv}(G) = \mathrm{bv}(H)$ und $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H)$ und jedes freie bzw. gebundene Vorkommen einer Variablen in H ist auch ein freies bzw. gebundenes Vorkommen in G.

Für jede Formel G, die eine der Formen $H_1 \wedge H_2$, $H_1 \vee H_2$ oder $H_1 \rightarrow H_2$ hat, ist $\mathrm{bv}(G) = \mathrm{bv}(H_1) \cup \mathrm{bv}(H_2)$ und $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H_1) \cup \mathrm{fv}(H_2)$ und jedes freie bzw. gebundene Vorkommen einer Variablen in H_1 oder H_2 ist auch ein freies bzw. gebundenes Vorkommen in G.

Für jede Formel G der Form $(\forall\mathtt{x}_i\, H)$ oder $(\exists\mathtt{x}_i\, H)$ ist $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H) \smallsetminus \{\mathtt{x}_i\}$ und $\mathrm{bv}(G) = \mathrm{bv}(H) \cup (\{\mathtt{x}_i\} \cap \mathrm{fv}(H))$, d. h. expliziter ausgedrückt

$$\mathrm{bv}(G) = \begin{cases} \mathrm{bv}(H) \cup \{\mathtt{x}_i\} & \text{falls } \mathtt{x}_i \in \mathrm{fv}(H) \\ \mathrm{bv}(H) & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem sind in G alle Vorkommen der Variablen $\mathtt{x}_i$ gebunden und man sagt auch, dass sich die in H freien Vorkommen von $\mathtt{x}_i$ im *Wirkungsbereich* des Quantors davor befinden und durch ihn gebunden werden. Alle Vorkommen anderer Variablen in G sind frei bzw. gebunden, je nachdem ob es in H freie oder gebundene Vorkommen sind.

Wirkungsbereich eines Quantors

geschlossene Formel

Eine Formel G heiße *geschlossen*, wenn $\text{fv}(G) = \{\}$ ist.

Als Beispiel betrachten wir die Formel G

$$\forall\mathtt{x}\,(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \land \exists\mathtt{y}\,\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$$

- Das sechste Zeichen ist das erste Vorkommen von $\mathtt{x}$; es ist ein gebundenes Vorkommen, denn dieses $\mathtt{x}$ wird durch den Allquantor am Anfang der Formel gebunden.
- Das fünfzehnte Zeichen ist das zweite Vorkommen von $\mathtt{x}$; es ist ein gebundenes Vorkommen, denn dieses $\mathtt{x}$ wird ebenfalls durch den Allquantor am Anfang der Formel gebunden.
- Das achte Zeichen ist das erste Vorkommen von $\mathtt{y}$; es ist ein freies Vorkommen.
- Das siebzehnte Zeichen ist das zweite Vorkommen von $\mathtt{y}$; es ist ein gebundenes Vorkommen, dieses $\mathtt{y}$ wird durch den Existenzquantor nach dem $\land$ gebunden.
- Es ist also $\text{bv}(G) = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$ und $\text{fv}(G) = \{\mathtt{y}\}$. Wie man sieht, müssen die Menge der frei und die Menge der gebunden vorkommenden Variablen nicht disjunkt sein.
- Die Formel ist nicht geschlossen (denn $\mathtt{y}$ kommt frei darin vor).

Substitution

Eine *Substitution* ist eine Abbildung $\sigma : Var_{PL} \to L_{Ter}$. Sind die k Variablen $\mathtt{x}_{i_j}$ mit $1 \le j \le k$ die einzigen Variablen mit $\sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \ne \mathtt{x}_{i_j}$, dann ist σ durch die Menge S der Paare $\{\mathtt{x}_{i_j}/\sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \mid 1 \le j \le k\}$ eindeutig bestimmt. (Es ist üblich, die Paare in der Form $\mathtt{x}_{i_j}/\sigma(\mathtt{x}_{i_j})$ und nicht in der Form $(\mathtt{x}_{i_j}, \sigma(\mathtt{x}_{i_j}))$ zu notieren.) Wir notieren σ dann auch in der Form σ_S, wobei S stets rechtseindeutig ist, da σ eine Abbildung ist. Zum Beispiel bedeutet $\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f}(\mathtt{x})\}}$ die Abbildung mit

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathtt{x}) &= \mathtt{c} \\
\sigma(\mathtt{y}) &= \mathtt{f}(\mathtt{x}) \\
\sigma(z) &= z \text{ für jedes } z \notin \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}
\end{aligned}$$

Man erweitert σ_S zu einer Abbildung $\sigma'_S : L_{Ter} \to L_{Ter}$, indem man die in einem Term vorkommenden Variablen „alle gleichzeitig“ gemäß S ersetzt:

$$\sigma'_S(t) = \begin{cases} \sigma_S(x), & \text{falls } t = x \text{ mit } x \in Var_{PL} \\ c, & \text{falls } t = c \text{ mit } c \in Const_{PL} \\ f(\sigma'_S(t_1), \dots, \sigma'_S(t_k)) & \text{falls } t = f(t_1, \dots, t_k) \text{ mit } f \in Fun_{PL} \text{ und } t_1, \dots, t_k \in L_{Ter} \end{cases}$$

Statt σ'_S schreibt man üblicherweise wieder einfach σ_S.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x}) &= \mathtt{c} \\
\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{y}) &= \mathtt{f(x)} \\
\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{g(y,x)}) &= \mathtt{g(f(x),c)} \\
\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{f(z,z)}) &= \mathtt{f(z,z)}
\end{aligned}$$

Eine Substitution $\sigma_S : L_{Ter} \to L_{Ter}$ erweitert man schließlich in einem zweiten Schritt zu einer Abbildung $\sigma''_S : L_{For} \to L_{For}$ (für die man hinterher ebenfalls einfach wieder σ_S schreibt). Das macht man induktiv und bei Formeln ohne Quantoren auf naheliegende Art und Weise:

$$\sigma''_S(G) = \begin{cases}
R(\sigma'_S(t_1),\dots,\sigma'_S(t_k)), & \text{falls } G = R(t_1,\dots,t_k) \text{ mit } R \in Rel_{PL} \text{ und } t_1,\dots,t_k \in L_{Ter} \\
\sigma'_S(t_1) \doteq \sigma'_S(t_2), & \text{falls } G = t_1 \doteq t_2 \text{ mit } t_1, t_2 \in L_{Ter} \\
\neg\sigma''_S(H), & \text{falls } G = \neg H \\
\sigma''_S(H_1) \wedge \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \wedge H_2 \\
\sigma''_S(H_1) \vee \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \vee H_2 \\
\sigma''_S(H_1) \to \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \to H_2
\end{cases}$$

Für den verbleibenden Fall einer quantifizierten Formel definieren wir vorbereitend zu jeder Substitution σ_S und jedem $x \in Var_{PL}$ eine Substitution σ_{S-x} vermöge der Festlegung:

$$\begin{aligned}
\sigma_{S-x}(x) &= x \\
\sigma_{S-x}(y) &= \sigma_S(y) \text{ für jedes } y \in Var_{PL} \text{ mit } y \neq x
\end{aligned}$$

Damit können wir nun noch definieren:

$$\begin{aligned}
\sigma''_S(\forall x\; H) &= \forall x\; \sigma''_{S-x}(H) \\
\sigma''_S(\exists x\; H) &= \exists x\; \sigma''_{S-x}(H)
\end{aligned}$$

Das bedeutet nichts anderes als dass bei einer Substitution gebundene Vorkommen von Variablen nicht ersetzt werden. Wir betrachten dazu als Beispiel die Formel $G = \mathtt{S(x)} \wedge \forall\mathtt{x}\; \mathtt{R(x,y)}$ und eine beliebige Substitution σ_S. Dann erhält man Schritt für Schritt zunächst einmal

$$\begin{aligned}
\sigma_S(G) &= \sigma_S(\mathtt{S(x)} \wedge \forall\mathtt{x}\; \mathtt{R(x,y)}) \\
&= \sigma_S(\mathtt{S(x)}) \wedge \sigma_S(\forall\mathtt{x}\; \mathtt{R(x,y)}) \\
&= \mathtt{S}(\sigma_S(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\; \sigma_{S-\mathtt{x}}(\mathtt{R(x,y)}) \\
&= \mathtt{S}(\sigma_S(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\; \mathtt{R}(\sigma_{S-\mathtt{x}}(\mathtt{x}), \sigma_{S-\mathtt{x}}(\mathtt{y}))
\end{aligned}$$

Sei nun konkret die Substitution $\sigma_S = \sigma_{\{\mathtt{x/c,y/f(x)}\}}$. Dann ist $\sigma_{S-\mathtt{x}}$ nichts anderes als $\sigma_{\{\mathtt{y/f(x)}\}}$. Folglich ergibt sich in obigem Beispiel weiter:

$$\begin{aligned}
\sigma_S(G) &= \mathtt{S}(\sigma_S(\mathtt{x})) \land \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{S-\mathtt{x}}(\mathtt{x}), \sigma_{S-\mathtt{x}}(\mathtt{y})) \\
&= \mathtt{S}(\sigma_{\{\mathtt{x/c,y/f(x)}\}}(\mathtt{x})) \land \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{\{\mathtt{y/f(x)}\}}(\mathtt{x}), \sigma_{\{\mathtt{y/f(x)}\}}(\mathtt{y})) \\
&= \mathtt{S(c)} \land \forall \mathtt{x}\ \mathtt{R(x,f(x))}
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist etwas passiert, was man bei Substitutionen häufig vermeiden will. Nach der Substitution war das zweite Argument von $\mathtt{R}$ durch den Allquantor gebunden, vor der Substitution aber noch nicht. Häufig möchte man nur über Substitutionen reden, bei denen das nicht passiert. Deshalb erhalten sie einen besonderen Namen.

kollisionsfreie Substitution

Eine Substitution σ heiße *kollisionsfrei* für eine Formel G, wenn für jede Variable $\mathtt{x}_i$, die durch σ verändert wird (also $\sigma(\mathtt{x}_i) \neq \mathtt{x}_i$) und jede Stelle eines freien Vorkommens von $\mathtt{x}_i$ in G gilt: Diese Stelle liegt nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall \mathtt{x}_j$ oder $\exists \mathtt{x}_j$, wenn $\mathtt{x}_j$ eine Variable ist, die in $\sigma(\mathtt{x}_i)$ vorkommt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts geht es erst einmal darum, eine ganze Reihe allgemeingültiger Formeln kennenzulernen. Dazu verallgemeinern wir noch einen Begriff, der schon bei aussagenlogischen Formeln eine Rolle spielte. Zwei prädikatenlogische Formeln G und H heißen *logisch äquivalent*, wenn für jede passende Interpretation (D, I) und jede passende Variablenbelegung β gilt: $val_{D,I,\beta}(G) = val_{D,I,\beta}(H)$.

logisch äquivalente Formeln

Man kann sich überlegen, dass zwei Formeln G und H genau dann logisch äquivalent sind, wenn $\models G \leftrightarrow H$ gilt, wenn also $G \leftrightarrow H$ allgemeingültig ist.

Nachfolgend führen wir eine Reihe logisch äquivalenter Formelpaare auf, ohne auf Beweise für die logische Äquivalenz einzugehen. (Interessierte seien auf das Skript der Vorlesung „Formale Systeme“ verwiesen.) Es seien jeweils G und H beliebige prädikatenlogische Formeln.

1. $\neg\forall \mathtt{x}_i\, G$ und $\exists \mathtt{x}_i\, \neg G$
2. $\neg\exists \mathtt{x}_i\, G$ und $\forall \mathtt{x}_i\, \neg G$
3. $\forall \mathtt{x}_i \forall \mathtt{x}_j\, G$ und $\forall \mathtt{x}_j \forall \mathtt{x}_i\, G$
4. $\exists \mathtt{x}_i \exists \mathtt{x}_j\, G$ und $\exists \mathtt{x}_j \exists \mathtt{x}_i\, G$
5. $\forall \mathtt{x}_i\, (G \land H)$ und $\forall \mathtt{x}_i\, G \land \forall \mathtt{x}_i\, H$
6. $\exists \mathtt{x}_i\, (G \lor H)$ und $\exists \mathtt{x}_i\, G \lor \exists \mathtt{x}_i\, H$
7. wenn $\mathtt{x}_j \notin \mathrm{fv}(G)$ und $\sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}$ kollisionsfrei für G, dann sind äquivalent
   - $\forall \mathtt{x}_i\, G$ und $\forall x_j\, \sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}(G)$
   - $\exists \mathtt{x}_i\, G$ und $\exists x_j\, \sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}(G)$

   gebundener Umbenennung

   Man spricht in diesem Fall von *gebundener Umbenennung* der Variablen.
8. wenn $\mathtt{x}_i \notin \mathrm{fv}(G)$, dann sind äquivalent

- $G \wedge \forall x_i\, H$ und $\forall x_i\,(G \wedge H)$
- $G \wedge \exists x_i\, H$ und $\exists x_i\,(G \wedge H)$
- $G \vee \forall x_i\, H$ und $\forall x_i\,(G \vee H)$
- $G \vee \exists x_i\, H$ und $\exists x_i\,(G \vee H)$
- $G \rightarrow \forall x_i\, H$ und $\forall x_i\,(G \rightarrow H)$
- $G \rightarrow \exists x_i\, H$ und $\exists x_i\,(G \rightarrow H)$

9. wenn $x_i \notin \mathrm{fv}(H)$, dann sind äquivalent
   - $\forall x_i\, G \rightarrow H$ und $\exists x_i\,(G \rightarrow H)$
   - $\exists x_i\, G \rightarrow H$ und $\forall x_i\,(G \rightarrow H)$

Weitere allgemeingültige Formeln, die aber nicht von der Form $G \leftrightarrow H$ sind, werden auch im nächsten Abschnitt benötigt. Es seien $G \in L_{For}$ und $x_i \in Var_{PL}$.

1. Wenn die Substitution $\sigma_{\{x_i/t\}}$ kollisionsfrei für G ist, dann ist
   - $(\forall x_i\, G) \rightarrow \sigma_{\{x_i/t\}}(G)$

   allgemeingültig.
2. Wenn $x_i \notin \mathrm{fv}(G)$ ist, dann ist
   - $\forall x_i\,(G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow \forall x_i\, H)$

   allgemeingültig.
3. Für Variablen x_i, x_j, x_k sind die Formeln
   - $x_i \doteq x_i$
   - $x_i \doteq x_j \rightarrow x_j \doteq x_i$
   - $x_i \doteq x_j \rightarrow (x_j \doteq x_k \rightarrow x_i \doteq x_k)$

   allgemeingültig.
4. Wenn $x_1, \dots, x_k \in Var_{PL}$ und $y_1, \dots, y_k \in Var_{PL}$, f_i ein k-stelliges Funktionssymbol und R_i ein k-stelliges Relationssymbol, dann sind die Formeln
   - $x_1 \doteq y_1 \rightarrow (x_2 \doteq y_2 \rightarrow (\cdots(x_k \doteq y_k \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_k) \doteq f_i(y_1, \dots, y_k))\cdots))$
   - $x_1 \doteq y_1 \rightarrow (x_2 \doteq y_2 \rightarrow (\cdots(x_k \doteq y_k \rightarrow (R_i(x_1, \dots, x_k) \rightarrow R_i(y_1, \dots, y_k)))\cdots))$

   allgemeingültig.

13.4 BEWEISBARKEIT

Der grundlegende Begriff im Zusammenhang mit Beweisbarkeit sowohl in der Aussagenlogik als auch in der Prädikatenlogik ist der des Kalküls. In Kapitel 5 hatten wir bereits die prinzipielle Struktur eines Kalküls anhand der Aussagenlogik kennengelernt:

- In der Menge aller syntaktisch korrekten Formeln wurde
- eine Menge von *Axiomen* ausgezeichnet, aus denen mithilfe
- von *Ableitungsregeln* in endliche vielen Schritten
- die *Theoreme* des Kalküls ableitbar sind.

Der wesentliche Punkt war dabei, dass man den Kalkül so konstuieren kann — und dann eben auch so konstruiert — dass die Menge der Theoreme mit der Menge der allgemeingültigen Formeln übereinstimmt. Man kann also im Kalkül genau die Formeln beweisen, die in jeder Interpretation wahr sind.

Dieses Programm werden wir nun für die Prädikatenlogik erster Stufe analog vorstellen. Dabei werden wir (wie in der Aussagenlogik so auch hier erst recht) darauf verzichten, den zentralen Satz zu beweisen. Das würde über den Rahmen dieser Grundlagenvorlesung hinausgehen.

Für die Prädikatenlogik gibt es, wie für die Aussagenlogik, ganz unterschiedliche Kalküle, die das gleiche leisten. Wir beschreiben nachfolgend eine Variante, die auf David Hilbert zurückgeht. Dazu sei

- A_{For} ein Zeichenvorrat (mit Variablen-, Konstanten-, Funktions- und Relationssymbolen) für prädikatenlogische Formeln
- L_{For} die Menge der syntaktisch korrekten prädikatenlogischen Formeln über dem Alphabet A_{For},
- $Ax_{PL} \subseteq L_{For}$ eine nachfolgend definierte Menge von Axiomen,
- und zwei Schlussregeln, nämlich neben dem schon bekannten Modus ponens noch „Generalisierung".

Als Menge Ax_{PL} der Axiome für den Hilbert-Kalkül wählen wir die Vereinigung der folgenden Mengen von Formeln. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt für die Formeln jeder Menge angemerkt, dass es sich jeweils um allgemeingültige prädikatenlogische Formeln handelt.

$$
\begin{aligned}
Ax_{AL1} &= \left\{ (G \to (H \to G)) \;\middle|\; G, H \in L_{For} \right\} \\
Ax_{AL2} &= \left\{ (G \to (H \to K)) \to ((G \to H) \to (G \to K)) \;\middle|\; G, H, K \in L_{For} \right\} \\
Ax_{AL3} &= \left\{ (\neg H \to \neg G) \to ((\neg H \to G) \to H) \;\middle|\; G, H \in L_{For} \right\} \\
Ax_{PL1} &= \left\{ (\forall \mathtt{x}_i\, G) \to \sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}}(G) \;\middle|\; G \in L_{For}, \mathtt{x}_i \in Var_{PL}, t \in L_{Ter} \text{ und } \sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}} \text{ kollisionsfrei für } G \right\} \\
Ax_{PL2} &= \left\{ (\forall \mathtt{x}_i\, (G \to H)) \to (G \to \forall \mathtt{x}_i\, H) \;\middle|\; G, H \in L_{For}, \mathtt{x}_i \in Var_{PL}, \text{ und } \mathtt{x}_i \notin \operatorname{fv}(G) \right\} \\
Ax_{Eq_1} &= \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_i \;\middle|\; \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \right\} \\
Ax_{Eq_2} &= \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \to \mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_i \;\middle|\; \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j \in Var_{PL} \right\} \\
Ax_{Eq_3} &= \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \to (\mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_k \to \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_k) \;\middle|\; \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, \mathtt{x}_k \in Var_{PL} \right\} \\
Ax_{Eq_4} &= \Big\{ \mathtt{x}_{i_1} \doteq \mathtt{x}_{j_1} \to (\mathtt{x}_{i_2} \doteq \mathtt{x}_{j_2} \to (\cdots(\mathtt{x}_{i_n} \doteq \mathtt{x}_{j_n} \to \mathtt{f}_i(\mathtt{x}_{i_1}, \dots, \mathtt{x}_{i_n}) \doteq \mathtt{f}_i(\mathtt{x}_{j_1}, \dots, \mathtt{x}_{j_n}))\cdots)) \\
&\qquad \Big|\; \mathtt{x}_{i_1}, \cdots, \mathtt{x}_{i_n}, \mathtt{x}_{j_1}, \cdots, \mathtt{x}_{j_n} \in Var_{PL}, \mathtt{f}_i \in Fun_{PL} \Big\} \\
Ax_{Eq_5} &= \Big\{ \mathtt{x}_{i_1} \doteq \mathtt{x}_{j_1} \to (\mathtt{x}_{i_2} \doteq \mathtt{x}_{j_2} \to (\cdots(\mathtt{x}_{i_n} \doteq \mathtt{x}_{j_n} \to (\mathtt{R}_i(\mathtt{x}_{i_1}, \dots, \mathtt{x}_{i_n}) \to \mathtt{R}_i(\mathtt{x}_{j_1}, \dots, \mathtt{x}_{j_n})))\cdots)) \\
&\qquad \Big|\; \mathtt{x}_{i_1}, \cdots, \mathtt{x}_{i_n}, \mathtt{x}_{j_1}, \cdots, \mathtt{x}_{j_n} \in Var_{PL}, \mathtt{R}_i \in Rel_{PL} \Big\}
\end{aligned}
$$

Im Fall der Prädikatenlogik gibt es zwei Schlussregeln. Die eine ist wieder Modus Ponens, aber dieses Mal natürlich für prädikatenlogische Formeln. Als Relation geschrieben ist $MP \subseteq L^3_{For}$ mit

$$MP = \{(G \rightarrow H, G, H) \mid G, H \in L_{For}\} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{G \rightarrow H \qquad G}{H}$$

Die zweite Ableitungsregel heißt *Generalisierung*. $GEN \subseteq L^2_{For}$ ist so definiert: *Generalisierung*

$$GEN = \{(G, (\forall \mathtt{x}_i\, G)) \mid G \in L_{For} \text{ und } \mathtt{x}_i \in Var_{PL}\} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{G}{(\forall \mathtt{x}_i\, G)}$$

Man mache sich bitte klar, dass die Anwendung von sowohl Modus ponens als auch Generalisierung auf allgemeingültige Formeln wieder allgemeingültige Formeln liefert.

Die Formalisierung des Begriffs *Ableitung* oder auch *Beweis* erweitert die Vorgehensweise aus der Aussagenlogik um die Möglichkeit, in einem Schritt Generalisierung anzuwenden. *Ableitung* *Beweis*

Dazu sei Γ eine Formelmenge sogenannter *Hypothesen* oder *Prämissen* und G eine Formel. Eine *Ableitung* von G aus Γ ist eine endliche Folge $(G_1, \dots, G_n)$ von n Formeln mit der Eigenschaft, dass erstens $G_n = G$ ist und auf jede Formel G_i einer der folgenden Fälle zutrifft: *Hypothese* *Prämisse* *Ableitung*

- Sie ist ein Axiom: $G_i \in Ax_{PL}$.
- Oder sie ist eine Prämisse: $G_i \in \Gamma$.
- Oder es gibt Indizes i_1 und i_2 echt kleiner i, für die gilt: $(G_{i_1}, G_{i_2}, G_i) \in MP$.
- Oder es gibt einen Index i_1 echt kleiner i, für den gilt: $(G_{i_1}, G_i) \in GEN$.

Wir schreiben dann $\Gamma \vdash G$. Ist $\Gamma = \{\}$, so heißt eine entsprechende Ableitung auch ein *Beweis* von G und G ein *Theorem* des Kalküls, in Zeichen: $\vdash G$. *Beweis* *Theorem*

Es ist nicht Aufgabe dieser Vorlesung in Hilberts Kalkül besonders viele oder besonders komplizierte Theoreme zu beweisen. Ein etwas ausführlicheres Beispiel soll aber klar machen, dass es der Kalkül erlaubt, Beweise im obigen Sinn zu führen, die „informell" geführten Beweisen entsprechen. Das soll auch eine Andeutung sein der Tatsache, dass alle unsere Beweise, die wir ja immer nicht präzise in einem Kalkül führen, eine solide Grundlagen haben.

Zuvor seien noch zwei wichtige Theoreme aufgeführt, deren Beweise Sie an anderen Stellen in der Literatur oder z. B. in der Vorlesung „Formale Systeme" finden können:

13.1 ***Theorem*** *Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq L_{For}$ und jede Formel $G \in L_{For}$ gilt:*

$$\textit{wenn } \Gamma \vdash G, \textit{ dann auch } \Gamma \models G\,.$$

Korrektheit des Hilbert-Kalküls

Man sagt auch, dass der Hilbert-Kalkül *korrekt* sei.

13.2 Theorem *Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq L_{For}$ und jede Formel $G \in L_{For}$ gilt:*

$$\textit{wenn } \Gamma \models G, \textit{ dann auch } \Gamma \vdash G\,.$$

Vollständigkeit des Hilbert-Kalküls

Man sagt auch, dass der Hilbert-Kalkül *vollständig* sei.

Außerdem sei noch eine Warnung ausgesprochen. Im Fall der Aussagenlogik hatten wir das Deduktionstheorem kennengelernt. Ohne an dieser Stelle auf Details einzugehen, sei erwähnt, dass man es *nicht* in voller Allgemeinheit auf die Prädikatenlogik übertragen kann. Wir erwähnen nur das folgende Analogon, das eine relativ starke Voraussetzung macht (es gibt schwächere hinreichende Voraussetzungen).

13.3 Theorem *Für jede* geschlossene *Formel $G \in L_{For}$ und jedes $H \in L_{For}$ gilt $G \vdash H$ genau dann, wenn $\vdash (G \to H)$ gilt.*

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir nun beispielhaft einen Fall, in dem $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $Const_{PL} = \{\mathtt{c}\}$. Außerdem sei $\Gamma = \{\, \forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x})\,\}$. Jedes Modell (D, I) von Γ besitzt also eine auf D definierte zweistellige Operation $I(\mathtt{f})$ und eine Konstante $I(\mathtt{c})$, die neutrales Element bezüglich der Operation ist.

Ein Modell erhält man z. B. durch die Festlegungen

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$ und $I(\mathtt{c}) = 0$,

ein anderes durch

- $D = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$, $I(\mathtt{f}) : \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \times \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \to \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* : (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$ und $I(\mathtt{c}) = \varepsilon$.

Wir wollen nun zeigen, dass in jedem solchen Modell das neutrale Element immer eindeutig ist, d. h. dass für jedes Modell von Γ die folgende Aussage G wahr ist:

$$\forall \mathtt{y}(\,\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{y} \doteq \mathtt{c})$$

Den Nachweis wollen wir unter Ausnutzung der Korrektheit des Hilbert-Kalküls zeigen. Wir müssen also eine Ableitung von G aus den Axiomen und den Hypothesen in Γ finden.

Wir werden nicht einen genauen Beweis im Hilbert-Kalkül aufschreiben; das ist zu aufwändig. Aber wir werden Formulierungen, wie wir sie „normalerweise“ nutzen, so erweitern, dass interessierte Leser den Rest hoffentlich selbst erledigen können. Salopp gesprochen beruht die Aussage auf der Beobachtung, dass

$$y = f(c, y) = c\,,$$

sobald c linksneutrales Element ist und y rechtsneutrales Element. Genauer kann man in folgenden Schritten vorgehen:

Schritt 0: Man beginnt mit einem „beliebigen“ $\mathtt{y}$ und muss zeigen:

$\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 1: zeige: $\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)}$

Schritt 1.1: wegen $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(c,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,c)} \doteq \mathtt{x})$ gilt insbesondere

$\mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{y} \land \mathtt{f(y,c)} \doteq \mathtt{y}$

Schritt 1.2: Also gilt $\mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{y}$.

Schritt 1.3: Also gilt $\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)}$.

Schritt 2: zeige: $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)}$

Schritt 3: zeige: $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 3.1: zeige $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x}) \land \forall\mathtt{x}(\mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.2: zeige $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x}) \land \forall\mathtt{x}(\mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \forall\mathtt{x}(\mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.3: also $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \forall\mathtt{x}(\mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.4: es gilt $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 3.5: also $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4: zeige $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4.1 mit Ergebnissen von Schritt 2 und Schritt 3 zeige:

$\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow (\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)} \land \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c})$

Schritt 4.2: zeige $(\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)} \land \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4.3: also $\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 5: Aus dem Ergebnis von Schritt 4 folgt durch Generalisierung:

$\forall\mathtt{y}(\forall\mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c})$

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Kapitel wurde zunächst die Syntax prädikatenlogischer Formeln festgelegt. Anschließend haben wir Interpretationen und Modelle eingeführt. Und am Ende haben wir gesehen, wie man dem semantischen Begriff der Allgemeingültigkeit den syntaktischen Begriff der Beweisbarkeit, z. B. im Hilbert-Kalkül, so gegenüberstellen kann, dass sich die beiden entsprechen.