Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 13: Prädikatenlogik erster Stufe

Thomas Worsch

KIT, Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2015/2016

Überblick

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Freie und gebundene Variablenvorkommen und Substitutionen

Beweisbarkeit

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Freie und gebundene Variablenvorkommen und Substitutionen

Beweisbarkeit

Prädikatenlogische Formeln

komplizierter aufgebaut als aussagenlogische

drei Schritte

- *Terme*
  - Variablensymbole, Konstantensymbole, Funktionssymbole
- *atomare Formeln*
  - aus Termen
  - mittels Relationssymbolen
- *prädikatenlogische Formeln*
  - aus atomaren Formeln
  - mittels aussagenlogischer Konnektive und
  - sogenannter Quantoren

nicht nur die Syntax ist aufwändiger …

Prädikatenlogische Formeln — der Aufwand lohnt sich

kompliziertere Syntax

aufwändigere Definitionen

aber (deswegen) viele benutzt

- beim „alltäglichen Formulieren“
  - Definitionen, Aussagen, Beweise
- bei der Verifikation von Algorithmen

großzügige Benutzung

- nach Abschluss dieses Kapitels

Terme — benötigte Alphabete

Variablensymbole: Alphabet Var_{PL}

- $\mathtt{x}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$, $\mathtt{z}$

Konstantensymbole: Alphabet $Const_{PL}$

- $\mathtt{c}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{c}$, $\mathtt{d}$

Funktionsymbole: Alphabet Fun_{PL}

- $\mathtt{f}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz $\mathtt{f}$, $\mathtt{g}$, $\mathtt{h}$
- jedes $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i) \in \mathbb{N}_+$

$$A_{Ter} = \{\mathtt{(}, \mathtt{,}, \mathtt{)}\} \cup Var_{PL} \cup Const_{PL} \cup Fun_{PL}$$

Terme — Syntax

Grammatik $(N_{Ter}, A_{Ter}, \mathtt{T}, P_{Ter})$

- m maximale Stelligkeit von Funktions- bzw. Relationssymbolen

$m + 1$ Nichtterminalsymbole

- $N_{Ter} = \{ \mathtt{T} \} \cup \{ \mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \leq m \}$

Produktionen

$\mathtt{L}_{i+1} \to \mathtt{L}_i \, \mathtt{,T}$	für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ mit $i < m$
$\mathtt{L}_1 \to \mathtt{T}$	
$\mathtt{T} \to \mathtt{c}_i$	für jedes $\mathtt{c}_i \in \mathit{Const}_{PL}$
$\mathtt{T} \to \mathtt{x}_i$	für jedes $\mathtt{x}_i \in \mathit{Var}_{PL}$
$\mathtt{T} \to \mathtt{f}_i\mathtt{(L}_{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)}\mathtt{)}$	für jedes $\mathtt{f}_i \in \mathit{Fun}_{PL}$

Terme — Beispiel

Bestandteile

- $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$
- $Const_{PL} = \{\mathtt{c}\}$
- $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{g}) = 1$

Dann

- $N_{Ter} = \{\mathtt{T}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2\}$
- $P_{Ter} = \{\mathtt{L}_2 \to \mathtt{L}_1\,\mathtt{,}\,\mathtt{T} \quad , \quad \mathtt{L}_1 \to \mathtt{T}$

  $\mathtt{T} \to \mathtt{c} \mid \mathtt{x} \mid \mathtt{y}$

  $\mathtt{T} \to \mathtt{g(L_1)} \mid \mathtt{f(L_2)}\}$

Beispielableitungen

- $\mathtt{L}_1 \Rightarrow^* \mathtt{c}$ und $\mathtt{T} \Rightarrow^* \mathtt{g(c)}$
- $\mathtt{L}_2 \Rightarrow^* \mathtt{x,g(c)}$ und $\mathtt{T} \Rightarrow^* \mathtt{f(x,g(c))}$

Terme — Beispiel

Bestandteile

- $\mathit{Var}_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$
- $\mathit{Const}_{PL} = \{\mathtt{c}\}$
- $\mathit{Fun}_{PL} = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{g}) = 1$

Dann

- $N_{Ter} = \{\mathtt{T}, \mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2\}$
- $P_{Ter} = \{\mathtt{L}_2 \rightarrow \mathtt{L}_1\mathtt{,T} \quad , \quad \mathtt{L}_1 \rightarrow \mathtt{T}$

  $\mathtt{T} \rightarrow \mathtt{c} \mid \mathtt{x} \mid \mathtt{y}$

  $\mathtt{T} \rightarrow \mathtt{g(L_1)} \mid \mathtt{f(L_2)}\}$

nicht ableitbar

- `xy`   `c(x)`   `f)x,y(`   `g(c,c,c,x)`

Atomare Formeln — Syntax

Relationsymbole: Alphabet Rel_{PL}

- $\doteq$ immer dabei
- $\mathtt{R}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
- kurz als $\mathtt{R}$, $\mathtt{S}$
- jedes $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i) \in \mathbb{N}_+$

$$A_{Rel} = A_{Ter} \cup Rel_{PL}$$

Grammatik $(N_{Rel}, A_{Rel}, \mathtt{A}, P_{Rel})$

- m maximale Stelligkeit von Funktions- bzw. Relationssymbolen
- $N_{Rel} = \{ \mathtt{A}, \mathtt{T} \} \cup \{ \mathtt{L}_i \mid i \in \mathbb{N}_+ \text{ und } i \le m \}$
- $P_{Rel} = P_{Ter} \cup \{ \mathtt{A} \to \mathtt{R}_i(\mathtt{L}_{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}) \mid \text{ für jedes } \mathtt{R}_i \in Rel_{PL} \}$
  $\cup \{ \mathtt{A} \to \mathtt{T} \doteq \mathtt{T} \}$.

Atomare Formeln — Beispiele

bei geeigneter Wahl von Var_{PL}, $Const_{PL}$, Fun_{PL} sowie

- $Rel_{PL} = \{\mathtt{R}, \mathtt{S}\}$
- mit $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 3$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{S}) = 1$

ableitbar

- $\mathtt{g(x)} \doteq \mathtt{f(x,g(z))}$
- $\mathtt{S(c)}$
- $\mathtt{R(y,c,g(x))}$

syntaktisch falsch

$\mathtt{x} \doteq \mathtt{y} \doteq \mathtt{z}$	$\mathtt{R} \doteq \mathtt{f}$	$\mathtt{S(x)} \doteq \mathtt{S(x)}$
$\mathtt{R(x,y)}$	$\mathtt{f(S(x))}$	$\mathtt{R(S(x),x,x)}$
$\mathtt{(S(S))(x)}$	$\mathtt{R)x,y(gRf()}$	$\mathtt{x} \rightarrow \mathtt{R(zx} \vee \mathtt{y}$

Prädikatenlogische Formeln — Syntax

$A_{For} = A_{Rel} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists \}$

- $\forall$ *Allquantor*
- $\exists$ *Existenzquantor*

Grammatik $(N_{For}, A_{For}, \mathtt{F}, P_{For})$

- $N_{For} = \{ \mathtt{F} \} \cup N_{Rel}$
- $P_{For} = P_{Rel} \cup \{ \mathtt{F} \rightarrow \mathtt{A} \}$

$$\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\neg \mathtt{F}), \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \wedge \mathtt{F}) \}$$

$$\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \vee \mathtt{F}), \mathtt{F} \rightarrow (\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}) \}$$

$$\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\forall \mathtt{x}_i\, \mathtt{F}) \mid \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \}$$

$$\cup \{ \mathtt{F} \rightarrow (\exists \mathtt{x}_i\, \mathtt{F}) \mid \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \}$$

Klammereinsparungsregeln wie in Aussagenlogik

- zusätzlich: Quantoren binden noch stärker als alle andere

Prädikatenlogische Formeln — Beispiele

$\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \land \mathtt{S}(\mathtt{x})$

- Kurzform von $(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) \land \mathtt{S}(\mathtt{x})$

$(\neg \forall \mathtt{x}\, \mathtt{x} \doteq \mathtt{y}) \to (\exists \mathtt{x}\, \neg\, \mathtt{x} \doteq \mathtt{y})$

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Terme
- atomare Formeln
- Formeln

Das sollten Sie üben:

- Formeln analysieren
  - Syntaxfehler suchen
- Formeln schreiben
  - Syntaxfehler vermeiden ;-)

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Freie und gebundene Variablenvorkommen und Substitutionen

Beweisbarkeit

Interpretationen

Alphabete $Const_{PL}$, Fun_{PL} und Rel_{PL} gegeben

Interpretation (D, I)

- nichtleere Menge D, das *Universum*
- $I(\mathtt{c}_i) \in D$ für $\mathtt{c}_i \in Const_{PL}$
- $I(\mathtt{f}_i) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i)} \to D$ für $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$
- $I(\mathtt{R}_i) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i)}$ für $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$
- $I(\mathtt{c}) = 0$
- $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$
- $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$ und $I(\mathtt{R}) = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}_0^2$

Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

- z. B. $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wert für jeden Term und ein Wahrheitswert für jede Formel

Alphabete $Const_{PL}$, Fun_{PL} und Rel_{PL} gegeben

Interpretation (D, I)

Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

definiere $val_{D,I,\beta} : L_{Ter} \cup L_{For} \to D \cup \mathbb{B}$

- für jeden Term t: $val_{D,I,\beta}(t) \in D$
- für jede Formel G: $val_{D,I,\beta}(G) \in \mathbb{B}$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wert in D für jeden Term

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

für Term $t \in L_{Ter}$ drei Möglichkeiten

- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{x}_i) = \beta(\mathtt{x}_i)$ für $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{c}_i) = I(\mathtt{c}_i)$ für $\mathtt{c}_i \in Const_{PL}$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{f}_i\mathtt{(}t_1\mathtt{,}\ldots\mathtt{,}t_k\mathtt{)}) = I(\mathtt{f}_i)(val_{D,I,\beta}(t_1),\ldots,val_{D,I,\beta}(t_k))$

erstes Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $$\begin{aligned} val_{D,I,\beta}(\mathtt{f(y,c)}) &= I(\mathtt{f})(val_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), val_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(42, 0) \\ &= 42 + 0 = 42 \end{aligned}$$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wert in D für jeden Term

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

für Term $t \in L_{Ter}$ drei Möglichkeiten

- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{x}_i) = \beta(\mathtt{x}_i)$ für $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{c}_i) = I(\mathtt{c}_i)$ für $\mathtt{c}_i \in Const_{PL}$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{f}_i\mathtt{(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_k\mathtt{)}) = I(\mathtt{f}_i)(val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_k))$

zweites Beispiel

- $D = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$, $I(\mathtt{c}) = \mathtt{bab}$, $I(\mathtt{f})$ Konkatenation
- $\beta(\mathtt{x}) = \mathtt{aaa}$ und $\beta(\mathtt{y}) = \mathtt{ba}$
- $$\begin{aligned} val_{D,I,\beta}(\mathtt{f(y,c)}) &= I(\mathtt{f})(val_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), val_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\mathtt{ba}, \mathtt{bab}) \\ &= \mathtt{ba} \cdot \mathtt{bab} = \mathtt{babab} \end{aligned}$$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede atomare Formel

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

für atomare Formel $A \in L_{Rel}$ zwei Möglichkeiten

- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}_i(t_1, \ldots, t_k)) =$
$$\begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_k)) \in I(\mathtt{R}_i) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, val_{D,I,\beta}(t_k)) \notin I(\mathtt{R}_i) \end{cases}$$
- $val_{D,I,\beta}(t_1 \doteq t_2) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) = val_{D,I,\beta}(t_2) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) \neq val_{D,I,\beta}(t_2) \end{cases}$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für atomare Formeln

- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}_i(t_1,\ldots,t_k)) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1),\ldots,val_{D,I,\beta}(t_k)) \in I(\mathtt{R}_i) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1),\ldots,val_{D,I,\beta}(t_k)) \notin I(\mathtt{R}_i) \end{cases}$
- $val_{D,I,\beta}(t_1 \doteq t_2) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) = val_{D,I,\beta}(t_2) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } val_{D,I,\beta}(t_1) \neq val_{D,I,\beta}(t_2) \end{cases}$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R(y,c)}) = \mathbf{w}$

  gdw. $(val_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), val_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. $(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. $(42, 0) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. $42 \leq 0$ also ist $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R(y,c)}) = \mathbf{f}$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede Formel

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

für Formel $G \in L_{For}$ mehrere Möglichkeiten

- $\neg H, \quad H_1 \wedge H_2, \quad H_1 \vee H_2, \quad H_1 \to H_2$
  - wie in der Aussagenlogik
  - z. B. $val_{D,I,\beta}(H_1 \wedge H_2) = b_\wedge(val_{D,I,\beta}(H_1), val_{D,I,\beta}(H_2))$
- $\forall \mathtt{x}_i\, H, \quad \exists \mathtt{x}_i\, H$
  - erfordert eine kleine Vorbereitung

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede Formel

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

für Formel $G \in L_{For}$ mehrere Möglichkeiten

- $\neg H, \quad H_1 \wedge H_2, \quad H_1 \vee H_2, \quad H_1 \to H_2$
  - wie in der Aussagenlogik
  - z. B. $val_{D,I,\beta}(H_1 \wedge H_2) = b_\wedge(val_{D,I,\beta}(H_1), val_{D,I,\beta}(H_2))$
- $\forall \mathtt{x}_i\, H, \quad \exists \mathtt{x}_i\, H$
  - erfordert eine kleine Vorbereitung

für $\beta : Var_{PL} \to D$, $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$ und $d \in D$ sei

$$\beta^d_{\mathtt{x}_i} : Var_{PL} \to D : \mathtt{x}_j \mapsto \begin{cases} \beta(\mathtt{x}_j) & \text{falls } j \neq i \\ d & \text{falls } j = i \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}$ — Wahrheitswert für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I)
Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta_{\mathtt{x}_i}^{d} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_{D,I,\beta}(\exists\, \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für mind. ein } d \in D \text{ und } \beta' = \beta_{\mathtt{x}_i}^{d} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$

  gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(val_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta_{\mathtt{x}_i}^{d} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$

  gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta_{\mathtt{x}}^{d}$: $(val_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta_{\mathtt{x}}^{d}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(val_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(0, d) \in I(\mathtt{R})$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall x_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{x_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(c) = 0$, $I(f)$ Addition, $I(R)$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(x) = 3$ und $\beta(y) = 42$
- $$val_{D,I,\beta}(\forall x\, R(c, x)) = \mathbf{w}$$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_x$: $(val_{D,I,\beta'}(c), val_{D,I,\beta'}(x)) \in I(R)$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_x$: $(I(c), \beta'(x)) \in I(R)$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_x$: $(0, d) \in I(R)$

  gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_x$: $0 \leq d$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

$$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
- $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(val_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(0, d) \in I(\mathtt{R})$

gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $0 \leq d$ also ist $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

Allgemeingültige Formeln

prädikatenlogische Formel F *allgemeingültig*, wenn

- für jede passende Interpretation (D, I) und
- jede passende Variablenbelegung β gilt:
- $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$.

einfache Beispiele:

- aussagenlogischer Tautologie G
- für vorkommende Aussagevariable $\mathtt{P}_i$
  je eine beliebige prädikatenlogische Formel G_i
- ersetze in G jedes $\mathtt{P}_i$ syntaktisch durch G_i

prädikatenlogische Tautologien

Beispiel

$$\mathtt{R(x,y)} \to ((\forall \mathtt{x}\, \mathtt{f(y)} \doteq \mathtt{c}) \to \mathtt{R(x,y)})$$

Allgemeingültige Formeln — aber keine Tautologien

Beispiele (für $t_1, t_2 \in L_{Ter}$)

$$(t_1 \doteq t_2) \to (t_2 \doteq t_1)$$

Beispiele (für $G, H \in L_{For}$)

$$(\forall \mathtt{x}_i\ (G \to H)) \to ((\forall \mathtt{x}_i\ G) \to (\forall \mathtt{x}_i\ H))$$

Beispiele (für $t \in L_{Ter}$)

$$(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\mathtt{x})) \to \mathtt{R}(t)$$

Modelle

(D, I) *Modell für* $G \in L_{For}$, wenn

- (D, I) Interpretation für G und
- für jedes β ist $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$.

(D, I) *Modell für* $\Gamma \subseteq L_{For}$, wenn

- (D, I) Modell für jedes $G \in \Gamma$

$\Gamma \models G$, wenn

- jedes Modell von Γ auch Modell von G

$H \models G$, wenn $\{H\} \models G$

$\models G$, wenn $\{\} \models G$,
d. h. wenn G allgemeingültig

Modelle — Beispiel

Formel: $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x}$

Modell: $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition

- anschaulich: für jede nichtnegative ganze Zahl x ist $x + 0 = x$
- genauer: prüfe, ob für jedes β gilt: $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$
- prüfe für $d \in \mathbb{N}_0$ und $\beta' = \beta_{\mathtt{x}}^{d}$, ob $val_{D,I,\beta'}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x}) = \mathbf{w}$
- gdw. $val_{D,I,\beta'}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c})) = val_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})$ ist.
- linke Seite $I(\mathtt{f})(\beta'(\mathtt{x}), I(\mathtt{c})) = \beta'(\mathtt{x}) + 0 = \beta'(\mathtt{x})$
- gleich rechter Seite

anderes Modell von G:
$D = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, $I(\mathtt{c}) = \varepsilon$, $I(\mathtt{f})$ Konkatenation

kein Modell: $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Multiplikation

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Interpretationen
  - Werte in D für jeden Term
  - Wahrheitswert für jede Formel
- Modelle

Das sollten Sie üben:

- Terme und Formeln auswerten
- Formeln auf Allgemeingültigkeit prüfen

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Freie und gebundene Variablenvorkommen und Substitutionen

Beweisbarkeit

Vorkommen von Variablensymbolen in Formeln

nur Vorkommen in Termen

- *nicht* die Symbole unmittelbar hinter Quantoren

gleiche Variable kann an mehreren Stellen vorkommen

unterscheide *freie* und *gebundene* Vorkommen

definiere

- Menge $\mathrm{fv}(G)$ der frei vorkommenden Variablen und
- die Menge $\mathrm{bv}(G)$ der gebunden vorkommenden Variablen

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

atomare Formel G

- alle Vorkommen von Variablen sind frei
- $\mathrm{bv}(G) = \{\}$
- $\mathrm{fv}(G)$ Menge aller in G an mindestens einer Stelle vorkommenden Variablen.

$G = \neg H$

- $\mathrm{bv}(G) = \mathrm{bv}(H)$ und $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H)$
- freies bzw. gebundenes Vorkommen in H ist ein freies bzw. gebundenes Vorkommen in G.

$G \in \{ H_1 \wedge H_2, H_1 \vee H_2, H_1 \rightarrow H_2 \}$

- $\mathrm{bv}(G) = \mathrm{bv}(H_1) \cup \mathrm{bv}(H_2)$ und $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H_1) \cup \mathrm{fv}(H_2)$
- freies bzw. gebundenes Vorkommen in H_i ist ein freies bzw. gebundenes Vorkommen in G.

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen (2)

G von der Form $(\forall \mathtt{x}_i\, H)$ oder $(\exists\, \mathtt{x}_i\, H)$

- $\mathrm{bv}(G) = \begin{cases} \mathrm{bv}(H) \cup \{\mathtt{x}_i\} & \text{falls } \mathtt{x}_i \in \mathrm{fv}(H) \\ \mathrm{bv}(H) & \text{sonst} \end{cases}$
- $\mathrm{fv}(G) = \mathrm{fv}(H) \smallsetminus \{\mathtt{x}_i\}$
- in G alle Vorkommen der Variablen $\mathtt{x}_i$ gebunden
- Vorkommen anderer Variablen in G frei bzw. gebunden wie in H

Redeweisen: alle in H freien Vorkommen von $\mathtt{x}_i$

- befinden sich im *Wirkungsbereich* des Quantors am Anfang
- werden *durch den Quantor* am Anfang von G *gebunden*

Formel G *geschlossen*, wenn $\mathrm{fv}(G) = \{\}$

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

Beispiel $\forall \mathtt{x} (\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \land \exists \mathtt{y}\, \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$

- sechstes Zeichen
  - erstes Vorkommen von $\mathtt{x}$
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- fünfzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von $\mathtt{x}$
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- achtes Zeichen
  - erstes Vorkommen von $\mathtt{y}$
  - freies Vorkommen
- siebzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von $\mathtt{y}$
  - Vorkommen gebunden durch Existenzquantor
- also $\mathrm{bv}(G) = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$ und $\mathrm{fv}(G) = \{\mathtt{y}\}$

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

Beispiel $\forall x(R(x,y) \land \exists y\, R(x,y))$

- sechstes Zeichen
  - erstes Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- fünfzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- achtes Zeichen
  - erstes Vorkommen von y
  - freies Vorkommen
- siebzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von y
  - Vorkommen gebunden durch Existenzquantor
- also $\mathrm{bv}(G) = \{x, y\}$ und $\mathrm{fv}(G) = \{y\}$

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

Beispiel $\forall \mathtt{x} (\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \exists \mathtt{y}\, \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$

- sechstes Zeichen
  - erstes Vorkommen von $\mathtt{x}$
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- fünfzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von $\mathtt{x}$
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- achtes Zeichen
  - erstes Vorkommen von $\mathtt{y}$
  - freies Vorkommen
- siebzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von $\mathtt{y}$
  - Vorkommen gebunden durch Existenzquantor
- also $\mathrm{bv}(G) = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$ und $\mathrm{fv}(G) = \{\mathtt{y}\}$

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

Beispiel $\forall x(\, R(x,y) \wedge \exists y\, R(x,y)\,)$

- sechstes Zeichen
  - erstes Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- fünfzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- achtes Zeichen
  - erstes Vorkommen von y
  - freies Vorkommen
- siebzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von y
  - Vorkommen gebunden durch Existenzquantor
- also $\mathrm{bv}(G) = \{x, y\}$ und $\mathrm{fv}(G) = \{y\}$

freie und gebundene Vorkommen von Variablensymbolen

Beispiel $\forall x (R(x , y) \land \exists y \, R(x , y))$

- sechstes Zeichen
  - erstes Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- fünfzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von x
  - Vorkommen gebunden durch Allquantor am Anfang
- achtes Zeichen
  - erstes Vorkommen von y
  - freies Vorkommen
- siebzehntes Zeichen
  - zweites Vorkommen von y
  - Vorkommen gebunden durch Existenzquantor
- also $\mathrm{bv}(G) = \{x, y\}$ und $\mathrm{fv}(G) = \{y\}$

Substitutionen

Substitution: Abbildung $\sigma : \mathit{Var}_{PL} \to L_{Ter}$

falls σ durch Menge S der Paare $S = \{\, \mathtt{x}_{i_j}/\sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \mid 1 \leq j \leq k\}$
eindeutig bestimmt
also insbesondere S rechtseindeutig
schreibe $\sigma_S = \sigma_{\{\, \mathtt{x}_{i_j}/\sigma(\mathtt{x}_{i_j}) \mid 1 \leq j \leq k\}}$.

Beispiel: $\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c}, \mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$ Abbildung mit

$$\sigma(\mathtt{x}) = \mathtt{c}$$
$$\sigma(\mathtt{y}) = \mathtt{f(x)}$$
$$\sigma(z) = z \text{ für jedes } z \notin \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$$

Erweiterung auf Terme und Formeln

Substitutionen — erweitert auf Terme

erweitere σ_S zu $\sigma'_S : L_{Ter} \to L_{Ter}$,

$$\sigma'_S(t) = \begin{cases} \sigma_S(x), & \text{falls } t = x \in \mathit{Var}_{PL} \\ c, & \text{falls } t = c \in \mathit{Const}_{PL} \\ f(\sigma'_S(t_1), \ldots, \sigma'_S(t_k)) & \text{falls } t = f(t_1, \ldots, t_k) \\ & \text{mit } f \in \mathit{Fun}_{PL}, t_1, \ldots, t_k \in L_{Ter} \end{cases}$$

schreibe statt σ'_S wieder σ_S

Beispiele:

$$\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x}) = \mathtt{c}$$

$$\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{y}) = \mathtt{f(x)}$$

$$\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{g(y,x)}) = \mathtt{g(f(x),c)}$$

$$\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{f(z,z)}) = \mathtt{f(z,z)}$$

Substitutionen — erweitert auf Terme

erweitere σ_S zu $\sigma'_S : L_{Ter} \to L_{Ter}$,

$$\sigma'_S(t) = \begin{cases} \sigma_S(x), & \text{falls } t = x \in Var_{PL} \\ c, & \text{falls } t = c \in Const_{PL} \\ f(\sigma'_S(t_1), \dots, \sigma'_S(t_k)) & \text{falls } t = f(t_1, \dots, t_k) \\ & \text{mit } f \in Fun_{PL}, t_1, \dots, t_k \in L_{Ter} \end{cases}$$

schreibe statt σ'_S wieder σ_S

Achtung:

$$\begin{aligned} \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{y},\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y})) &= \mathtt{f}(\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{y},\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}(\mathtt{x}), \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{y},\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}(\mathtt{y})) \\ &= \mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \end{aligned}$$

aber $\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{y}\}}(\sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{y})$

Alle Variablen werden „*gleichzeitig* substituiert“!

Substitutionen — erweitert auf nicht quantifizierte Formeln

erweitere σ_S zu $\sigma''_S : L_{For} \to L_{For}$,

$$\sigma''_S(G) = \begin{cases} R(\sigma'_S(t_1), \ldots, \sigma'_S(t_k)), & \text{falls } G = R(t_1, \ldots, t_k) \in L_{Rel} \\ \sigma'_S(t_1) \doteq \sigma'_S(t_2), & \text{falls } G = t_1 \doteq t_2 \text{ mit } t_1, t_2 \in L_{Ter} \\ \neg\, \sigma''_S(H), & \text{falls } G = \neg\, H \\ \sigma''_S(H_1) \wedge \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \wedge H_2 \\ \sigma''_S(H_1) \vee \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \vee H_2 \\ \sigma''_S(H_1) \to \sigma''_S(H_2), & \text{falls } G = H_1 \to H_2 \end{cases}$$

schreibe statt σ''_S wieder σ_S

Substitutionen — erweitert auf quantifizierte Formeln

zu σ_S und $x \in Var_{PL}$ definiere Substitution σ_{S-x}:

$$\sigma_{S-x}(x) = x$$
$$\sigma_{S-x}(y) = \sigma_S(y) \text{ für jedes } y \in Var_{PL} \text{ mit } y \neq x$$

Beispiel

- für $\sigma = \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}$
- ist $\sigma_{-\mathtt{x}} = \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{x}\}-\mathtt{x}} = \sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{x}\}}$

definiere
$$\sigma''_S(\forall x\ H) = \forall x\ \sigma''_{S-x}(H)$$
$$\sigma''_S(\exists x\ H) = \exists x\ \sigma''_{S-x}(H)$$

gebundene Variablenvorkommen werden nicht substituiert

schreibe statt σ''_S wieder σ_S

Substitutionen — Beispiel für eine quantifizierte Formel

Beispiel $G = \mathtt{S(x)} \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}$.

für jedes σ ist
$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \sigma(\mathtt{S(x)} \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}) \\ &= \sigma(\mathtt{S(x)}) \wedge \sigma(\forall\mathtt{x}\ \mathtt{R(x,y)}) \\ &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\ \sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{R(x,y)}) \\ &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{x}),\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{y}))\end{aligned}$$

konkret z. B. $\sigma = \sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$, also $\sigma_{-\mathtt{x}} = \sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}$

also
$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \mathtt{S}(\sigma(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{x}),\sigma_{-\mathtt{x}}(\mathtt{y})) \\ &= \mathtt{S}(\sigma_{\{\mathtt{x}/\mathtt{c},\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x})) \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R}(\sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{x}),\sigma_{\{\mathtt{y}/\mathtt{f(x)}\}}(\mathtt{y})) \\ &= \mathtt{S(c)} \wedge \forall\mathtt{x}\ \mathtt{R(x,f(x))}\end{aligned}$$

Kollisionsfreie Substitutionen für Formeln

Substitution σ für Formel G *kollisionsfrei*, wenn gilt:

- wenn
  - $\sigma(\mathtt{x}_i) \neq \mathtt{x}_i$ und
  - $\mathtt{x}_j$ in $\sigma(\mathtt{x}_i)$ vorkommt,
- dann
  - jedes freie Vorkommen von $\mathtt{x}_i$ in G
  - *nicht* im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall \mathtt{x}_j$ oder $\exists \mathtt{x}_j$

Logisch äquivalente Formeln

Formeln G und H *logisch äquivalent*, wenn

- für jede passende Interpretation (D, I) und
- jede passende Variablenbelegung β

gilt:

- $val_{D,I,\beta}(G) = val_{D,I,\beta}(H)$

Satz. Wenn

- G und H logisch äquivalent,
- Formel F enthält G als Teilformel und
- Formel F' entsteht aus F durch Ersetzen von G durch H

dann

- ist F logisch äquivalent F'.

Lemma. Wenn G und H logisch äquivalent sind, dann ist $G \leftrightarrow H$ allgemeingültig.

Logisch äquivalente Formeln — Beispiele (1)

$G, H \in L_{For}$, $\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j \in Var_{PL}$

- $\neg\forall \mathtt{x}_i\, G$ und $\exists \mathtt{x}_i\, \neg G$
- $\neg\exists \mathtt{x}_i\, G$ und $\forall \mathtt{x}_i\, \neg G$

- $\forall \mathtt{x}_i\, \forall \mathtt{x}_j\, G$ und $\forall \mathtt{x}_j\, \forall \mathtt{x}_i\, G$
- $\exists \mathtt{x}_i\, \exists \mathtt{x}_j\, G$ und $\exists \mathtt{x}_j\, \exists \mathtt{x}_i\, G$

- $\forall \mathtt{x}_i\, (G \wedge H)$ und $\forall \mathtt{x}_i\, G \wedge \forall \mathtt{x}_i\, H$
- $\exists \mathtt{x}_i\, (G \vee H)$ und $\exists \mathtt{x}_i\, G \vee \exists \mathtt{x}_i\, H$

- wenn $\mathtt{x}_j \notin \mathrm{fv}(G)$ und $\sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}$ kollisionsfrei für G, dann sind äquivalent
  - $\forall \mathtt{x}_i\, G$ und $\forall x_j\, \sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}(G)$
  - $\exists \mathtt{x}_i\, G$ und $\exists x_j\, \sigma_{\{\mathtt{x}_i/\mathtt{x}_j\}}(G)$

  gebundene Umbenennung der Variable

Logisch äquivalente Formeln — Beispiele (2)

$G, H \in L_{For}$, $\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j \in Var_{PL}$

- wenn $\mathtt{x}_i \notin \mathrm{fv}(G)$, dann sind äquivalent
  - $G \wedge \forall \mathtt{x}_i\, H$ und $\forall \mathtt{x}_i\, (G \wedge H)$
  - $G \wedge \exists \mathtt{x}_i\, H$ und $\exists \mathtt{x}_i\, (G \wedge H)$

  - $G \vee \forall \mathtt{x}_i\, H$ und $\forall \mathtt{x}_i\, (G \vee H)$
  - $G \vee \exists \mathtt{x}_i\, H$ und $\exists \mathtt{x}_i\, (G \vee H)$

  - $G \rightarrow \forall \mathtt{x}_i\, H$ und $\forall \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H)$
  - $G \rightarrow \exists \mathtt{x}_i\, H$ und $\exists \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H)$
- wenn $\mathtt{x}_i \notin \mathrm{fv}(H)$, dann sind äquivalent
  - $(\forall \mathtt{x}_i\, G) \rightarrow H$ und $\exists \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H)$
  - $(\exists \mathtt{x}_i\, G) \rightarrow H$ und $\forall \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H)$

Weitere allgemeingültige Formeln (1)

$G, H \in L_{For}$, $\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j \in Var_{PL}$

- wenn Substitution $\sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}}$ kollisionsfrei für G ist, dann

  $$(\forall \mathtt{x}_i\, G) \rightarrow \sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}}(G)$$

  allgemeingültig

- wenn $\mathtt{x}_i \notin \mathrm{fv}(G)$, dann

  $$\forall \mathtt{x}_i\, (G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow \forall \mathtt{x}_i\, H)$$

  allgemeingültig

Weitere allgemeingültige Formeln (2)

$G, H \in L_{For}$

- Für $\mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, \mathtt{x}_k \in Var_{PL}$ sind
  - $\mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_i$
  - $\mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \rightarrow \mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_i$
  - $\mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \rightarrow (\mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_k \rightarrow \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_k)$

  allgemeingültig.

- Für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ gilt:
  Wenn $x_1, \ldots, x_k \in Var_{PL}$ und $y_1, \ldots, y_k \in Var_{PL}$,
  $\mathtt{f}_i$ ein k-stelliges Funktionssymbol und
  $\mathtt{R}_i$ ein k-stelliges Relationssymbol, dann sind
  - $x_1 \doteq y_1 \rightarrow (x_2 \doteq y_2 \rightarrow (\cdots (x_k \doteq y_k \rightarrow \mathtt{f}_i(x_1, \ldots, x_k) \doteq \mathtt{f}_i(y_1, \ldots, y_k)) \cdots))$
  - $x_1 \doteq y_1 \rightarrow (x_2 \doteq y_2 \rightarrow (\cdots (x_k \doteq y_k \rightarrow (\mathtt{R}_i(x_1, \ldots, x_k) \rightarrow \mathtt{R}_i(y_1, \ldots, y_k))) \cdots))$

  allgemeingültig.

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Freie und gebundene Variablenvorkommen und Substitutionen

Beweisbarkeit

Kalküle

Formeln

Axiome

Ableitungsregeln

Theoreme

Hilbert-Kalkül — für Prädikatenlogik erster Stufe

Alphabet A_{For}

- Variablen-, Konstanten-, Funktions-, Relationssymbole

Formelmenge L_{For}

Axiomenmenge $Ax_{PL} \subseteq L_{For}$ (kommt gleich)

Schlussregeln

- Modus ponens
- Generalisierung (kommt gleich)

Axiome für Hilbert-Kalkül — alle allgemeingültig (1)

$$Ax_{AL1} = \left\{ (G \to (H \to G)) \;\middle|\; G, H \in L_{For} \right\}$$

$$Ax_{AL2} = \Big\{ (G \to (H \to K)) \to ((G \to H) \to (G \to K)) \;\Big|\; G, H, K \in L_{For} \Big\}$$

$$Ax_{AL3} = \left\{ (\neg H \to \neg G) \to ((\neg H \to G) \to H) \;\middle|\; G, H \in L_{For} \right\}$$

Axiome für Hilbert-Kalkül — alle allgemeingültig (2)

$$Ax_{PL1} = \Big\{ (\forall \mathtt{x}_i\, G) \to \sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}}(G) \;\Big|\; G \in L_{For}, \mathtt{x}_i \in Var_{PL}, t \in L_{Ter} \text{ und } \sigma_{\{\mathtt{x}_i/t\}} \text{ kollisionsfrei für } G \Big\}$$

$$Ax_{PL2} = \Big\{ (\forall \mathtt{x}_i\, (G \to H)) \to (G \to \forall \mathtt{x}_i\, H) \;\Big|\; G, H \in L_{For}, \mathtt{x}_i \in Var_{PL}, \text{ und } \mathtt{x}_i \notin \mathrm{fv}(G) \Big\}$$

Axiome für Hilbert-Kalkül — alle allgemeingültig (3)

$$Ax_{Eq_1} = \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_i \;\middle|\; \mathtt{x}_i \in Var_{PL} \right\}$$

$$Ax_{Eq_2} = \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \rightarrow \mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_i \;\middle|\; \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j \in Var_{PL} \right\}$$

$$Ax_{Eq_3} = \left\{ \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_j \rightarrow (\mathtt{x}_j \doteq \mathtt{x}_k \rightarrow \mathtt{x}_i \doteq \mathtt{x}_k) \;\middle|\; \mathtt{x}_i, \mathtt{x}_j, \mathtt{x}_k \in Var_{PL} \right\}$$

$$\begin{aligned} Ax_{Eq_4} = \Big\{ & \mathtt{x}_{i_1} \doteq \mathtt{x}_{j_1} \rightarrow (\mathtt{x}_{i_2} \doteq \mathtt{x}_{j_2} \rightarrow (\cdots (\mathtt{x}_{i_n} \doteq \mathtt{x}_{j_n} \\ & \qquad \rightarrow \mathtt{f}_i(\mathtt{x}_{i_1}, \ldots, \mathtt{x}_{i_n}) \doteq \mathtt{f}_i(\mathtt{x}_{j_1}, \ldots, \mathtt{x}_{j_n})) \cdots)) \\ & \Big| \; \mathtt{x}_{i_1}, \cdots, \mathtt{x}_{i_n}, \mathtt{x}_{j_1}, \cdots, \mathtt{x}_{j_n} \in Var_{PL}, \mathtt{f}_i \in Fun_{PL} \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ax_{Eq_5} = \Big\{ & \mathtt{x}_{i_1} \doteq \mathtt{x}_{j_1} \rightarrow (\mathtt{x}_{i_2} \doteq \mathtt{x}_{j_2} \rightarrow (\cdots (\mathtt{x}_{i_n} \doteq \mathtt{x}_{j_n} \\ & \qquad \rightarrow (\mathtt{R}_i(\mathtt{x}_{i_1}, \ldots, \mathtt{x}_{i_n}) \rightarrow \mathtt{R}_i(\mathtt{x}_{j_1}, \ldots, \mathtt{x}_{j_n}))) \cdots)) \\ & \Big| \; \mathtt{x}_{i_1}, \cdots, \mathtt{x}_{i_n}, \mathtt{x}_{j_1}, \cdots, \mathtt{x}_{j_n} \in Var_{PL}, \mathtt{R}_i \in Rel_{PL} \Big\} \end{aligned}$$

Schlussregeln für den Hilbert-Kalkül

Modus ponens $MP \subseteq L_{For}^3$

- $MP = \{(G \to H, G, H) \mid G, H \in L_{For}\}$
- $$\frac{G \to H \qquad G}{H}$$

Generalisierung $GEN \subseteq L_{For}^2$

- $GEN = \{(G, (\forall \mathtt{x}_i\, G)) \mid G \in L_{For} \text{ und } \mathtt{x}_i \in Var_{PL}\}$
- $$\frac{G}{(\forall \mathtt{x}_i\, G)}$$

beide Schlussregeln erhalten Allgemeingültigkeit

Ableitungen — formal gefasst

Ableitungen nutzen Prämissen, Axiome und Schlussregeln

$\Gamma \subseteq \mathit{For}_{AL}$ *Hypothesen* oder *Prämissen* und
G eine Formel

Ableitung von G aus Γ

- endliche Folge $(G_1, \ldots, G_n)$ von Formeln mit
- $G_n = G$ (oder weiter vorne) und
- für jedes G_i trifft einer der folgenden Fälle zu:
  - Axiom $G_i \in \mathit{Ax}_{AL}$,
  - Prämisse $G_i \in \Gamma$
  - es gibt Indizes i_1 und i_2 echt kleiner i, für die gilt: $(G_{i_1}, G_{i_2}, G_i) \in \mathit{MP}$.
  - es gibt Index i_1 echt kleiner i, für den gilt: $(G_{i_1}, G_i) \in \mathit{GEN}$.

geschrieben $\Gamma \vdash G$

Ableitungen — formal gefasst

Ableitungen nutzen Prämissen, Axiome und Schlussregeln

$\Gamma \subseteq For_{AL}$ *Hypothesen* oder *Prämissen* und
G eine Formel

Ableitung von G aus Γ

- endliche Folge $(G_1, \ldots, G_n)$ von Formeln mit
- $G_n = G$ (oder weiter vorne) und
- für jedes G_i trifft einer der folgenden Fälle zu:
  - Axiom $G_i \in Ax_{AL}$,
  - Prämisse $G_i \in \Gamma$
  - es gibt Indizes i_1 und i_2 echt kleiner i, für die gilt: $(G_{i_1}, G_{i_2}, G_i) \in MP$.
  - es gibt Index i_1 echt kleiner i, für den gilt: $(G_{i_1}, G_i) \in GEN$.
    einziger Unterschied zur Aussagenlogik

geschrieben $\Gamma \vdash G$

Beweis — formal gefasst

Beweis von G: Ableitung aus $\Gamma = \{\}$

- geschrieben $\vdash G$
- G heißt *Theorem* des Kalküls

Hilbert-Kalkül — korrekt und vollständig

Satz.
Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq L_{For}$ und jedes $G \in L_{For}$ gilt:

$$\text{wenn } \Gamma \vdash G, \text{ dann auch } \Gamma \models G\ .$$

Der Hilbert-Kalkül ist *korrekt*.

Satz.
Für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq L_{For}$ und jedes $G \in L_{For}$ gilt:

$$\text{wenn } \Gamma \models G, \text{ dann auch } \Gamma \vdash G\ .$$

Der Hilbert-Kalkül ist *vollständig*.

Deduktionstheorem — aber nur mit Einschränkungen

Satz.
Für *geschlossene* Formel $G \in L_{For}$ und jede $H \in L_{For}$ gilt

$$G \vdash H \text{ genau dann, wenn } \vdash (G \to H)$$

gilt.

es gibt schwächere hinreichende Voraussetzungen

aber falsch für beliebige G und $G \vdash H$

Skizze eines Beispiels

es sei

- $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$
- $Const_{PL} = \{\mathtt{c}\}$
- $\Gamma = \{\ \forall\mathtt{x}\,(\mathtt{f(c,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,c)} \doteq \mathtt{x})\ \}$.

Modell (D, I) von Γ

- besitzt zweistellige Operation $I(\mathtt{f})$ auf D
- eine Konstante $I(\mathtt{c})$, die neutrales Element bezüglich $I(\mathtt{f})$ ist.

Skizze eines Beispiels

es sei

- $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$
- $Const_{PL} = \{\mathtt{c}\}$
- $\Gamma = \{\ \forall\mathtt{x}\,(\mathtt{f(c,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,c)} \doteq \mathtt{x})\ \}$.

Modell (D, I) von Γ

- besitzt zweistellige Operation $I(\mathtt{f})$ auf D
- eine Konstante $I(\mathtt{c})$, die neutrales Element bezüglich $I(\mathtt{f})$ ist.

Beispiele

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$ und $I(\mathtt{c}) = 0$,

Skizze eines Beispiels

es sei

- $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$
- $Const_{PL} = \{\mathtt{c}\}$
- $\Gamma = \{\ \forall\mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x})\ \}$.

Modell (D, I) von Γ

- besitzt zweistellige Operation $I(\mathtt{f})$ auf D
- eine Konstante $I(\mathtt{c})$, die neutrales Element bezüglich $I(\mathtt{f})$ ist.

Beispiele

- $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$ und $I(\mathtt{c}) = 0$,
- $D = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$,
  $I(\mathtt{f}) : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \times \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* : (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$ und
  $I(\mathtt{c}) = \varepsilon$.

Skizze eines Beispiels (2)

Ziel: neutrales Element immer eindeutig

in jedem Modell von Γ ist Formel G

$$\forall \mathtt{y}(\ \forall \mathtt{x}(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c})$$

wahr.

Weg:

- zeige $\Gamma \vdash G$
- dann auch $\Gamma \models G$ (Hilbert-Kalkül korrekt)

Skizze eines Beispiels (3)

Kern der Argumentation

$$\begin{aligned} y &= f(c, y) && \text{weil } c \text{ (links)neutral} \\ &= c && \text{weil } y \text{ (rechtbs)neutral} \end{aligned}$$

Übertragung in Hilbert-Kalkül

- prinzipiell möglich
- sehr mühsam
- beschränken uns auf Skizze

Skizze eines Beispiels (4)

grobe Vorgehensweise in fünf Schritten

Schritt 0: Ziel: für „beliebiges“ $\mathtt{y}$ gilt
$\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 1: zeige: $\mathtt{y} \doteq \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y})$

Schritt 2: zeige: $\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{y} \doteq \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y})$

Schritt 3: zeige: $\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4: zeige $\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 5: von Schritt 4 durch Generalisierung zu:
$\forall \mathtt{y}(\forall \mathtt{x}(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \to \mathtt{y} \doteq \mathtt{c})$

Skizze eines Beispiels (5)

Schritt 1: zeige: $\mathtt{y} \doteq \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y})$

Schritt 1.1: wegen $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{x})$ gilt insbesondere

$\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{y} \land \mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{c}) \doteq \mathtt{y}$

Schritt 1.2: Also gilt $\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{y}$.

Schritt 1.3: Also gilt $\mathtt{y} \doteq \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y})$.

Skizze eines Beispiels (6)

Schritt 2: zeige: $\forall x (f(y,x) \doteq x \wedge f(x,y) \doteq x) \rightarrow y \doteq f(c,y)$

- Schritt 1: $y \doteq f(c,y)$
- nutze Tautologieschema $G \rightarrow (H \rightarrow G)$

Skizze eines Beispiels (7)

Schritt 3: zeige:

$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{c}$

Schritt 3.1: zeige $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x})$
$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x}) \land \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.2: zeige $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x}) \land \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x})$
$\rightarrow \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.3: also $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x})$

Schritt 3.4: zeige $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{c}$

Schritt 3.5: also $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \doteq \mathtt{x} \land \mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{y}) \doteq \mathtt{c}$

Skizze eines Beispiels (8)

Schritt 4: zeige $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4.1 mit Ergebnissen von Schritt 2 und Schritt 3 zeige:
$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow (\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)} \wedge \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c})$

Schritt 4.2: zeige $(\mathtt{y} \doteq \mathtt{f(c,y)} \wedge \mathtt{f(c,y)} \doteq \mathtt{c}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Schritt 4.3: also $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{f(y,x)} \doteq \mathtt{x} \wedge \mathtt{f(x,y)} \doteq \mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{y} \doteq \mathtt{c}$

Zusammenfassung

Syntax prädikatenlogischer Formeln

- Terme, atomare Formeln, Formeln

Semantik

- Interpretationen und Variablenbelegungen
- Modelle von Formel(menge)n oder nicht
- Allgemeingültigkeit

Kalküle

- Beweisbarkeit
- Hilbert-Kalkül korrekt und vollständig