Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 6: Induktives Vorgehen

Thomas Worsch

KIT, Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2015/2016

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Eine Erinnerung

Potenzen von Wörtern wurden so definiert
für jedes Wort $w \in A^*$:

$$\begin{aligned} w^0 &= \varepsilon \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \ w^{n+1} &= w^n \cdot w \end{aligned}$$

Lemma. Für jedes Wort $w \in A^*$ gilt:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|w^n| = n \cdot |w|$.

Wie beweist man das?

Induktive Definitionen kann man zu Rechnen benutzen

Definition

$$w^0 = \varepsilon$$

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

Was ist w^1 ?

$$w^1 = w^{0+1} = w^0 \cdot w = \varepsilon \cdot w = w$$

Was ist w^2 ?

$$w^2 = w^{1+1} = w^1 \cdot w = w \cdot w$$

Was ist w^3 ?

$$w^3 = w^{2+1} = w^2 \cdot w = (w \cdot w) \cdot w$$

Das Lemma über Wortlängen — einfache Fälle

- $n = 0$: Das ist einfach: $|w^0| = |\varepsilon| = 0 = 0 \cdot |w|$.
- $n = 1$: Man kann ähnlich rechnen wie bei $w^1 = w$:

$$\begin{aligned} |w^1| = |w^{0+1}| &= |w^0 \cdot w| \\ &= |w^0| + |w| \\ &= 0|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 0 \\ &= 1|w| \end{aligned}$$

  weil für $n = 0$ richtig auch für $n = 1$ beweisbar
- $n = 2$: Wir gehen analog zu eben vor:

$$\begin{aligned} |w^2| = |w^{1+1}| &= |w^1 \cdot w| \\ &= |w^1| + |w| \\ &= 1|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 1 \\ &= 2|w| \end{aligned}$$

  weil für $n = 1$ richtig auch für $n = 2$ beweisbar

Vollständige Induktion — die Grundlage

Wenn eine Menge M

- nur Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ enthält,
- $0 \in M$ ist und
- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: wenn $n \in M$, dann $n + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}_0$.

Vollständige Induktion — das Prinzip

es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt

Ziel: „Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr."

zeige $\mathbb{N}_0 = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$

Vollständige Induktion — das Prinzip

es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt

Ziel: „Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr."

zeige $\mathbb{N}_0 = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$

Grundlage:

- wenn gilt $\qquad \mathcal{A}_0$

  für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\quad$ wenn $\mathcal{A}_n$, dann $\mathcal{A}_{n+1}$
- dann gilt auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\mathcal{A}_n$

Vollständige Induktion — das Prinzip

es sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Aussage $\mathcal{A}_n$ festgelegt

Ziel: „Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr."

zeige $\mathbb{N}_0 = \{n \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$

Grundlage:

- wenn gilt $\mathcal{A}_0$

  für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: wenn $\mathcal{A}_n$, dann $\mathcal{A}_{n+1}$
- dann gilt auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\mathcal{A}_n$

Beweisstruktur im einfachsten Fall:

Induktionsanfang: zeige: $\mathcal{A}_0$ gilt.

Induktionsschritt: zeige

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: wenn $\mathcal{A}_n$, dann $\mathcal{A}_{n+1}$

- $\mathcal{A}_n$ Induktionsvoraussetzung

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

Idee:

- es sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w^n| = n|w|$
- zeige: $M = \mathbb{N}_0$
- $\mathcal{A}_n$: die Aussage $|w^n| = n|w|$

Induktionsanfang $n = 0$: Zu zeigen: $|w^0| = 0 \cdot |w|$.

$$
\begin{aligned}
|w^0| &= |\varepsilon| && \text{nach Defintion von } w^0 \\
&= 0 = 0 \cdot |w| \, .
\end{aligned}
$$

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

Idee:

- es sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|w^n| = n|w|$
- zeige: $M = \mathbb{N}_0$
- $\mathcal{A}_n$: die Aussage $|w^n| = n|w|$

Induktionsanfang $n = 0$: Zu zeigen: $|w^0| = 0 \cdot |w|$.

$$\begin{aligned} |w^0| &= |\varepsilon| && \text{nach Defintion von } w^0 \\ &= 0 = 0 \cdot |w| \ . \end{aligned}$$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

- Zeige: für jedes n gilt:
  wenn $|w^n| = n|w|$, dann $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

Vollständige Induktion — Beweis des Lemmas

es sei $n \in \mathbb{N}_0$

zeige: wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr

Induktionsvoraussetzung: $\mathcal{A}_n$ ist wahr, also $|w^n| = n|w|$.

zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr, also $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

$$\begin{aligned}
|w^{n+1}| &= |w^n \cdot w| \\
&= |w^n| + |w| \\
&= n|w| + |w| && \text{nach Ind.vor.} \\
&= (n+1)|w|
\end{aligned}$$

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Vollständige Induktion: Varianten

Induktionsanfang an „späterer“ Stelle, z. B.
für jedes $n \geq 1$: $\mathcal{A}_n$

- Induktionsanfang: zeige $\mathcal{A}_1$
- Induktionsschritt: zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:
  wenn $\mathcal{A}_n$ wahr, dann auch $\mathcal{A}_{n+1}$

im letzten Schritt Benutzung nicht nur von $\mathcal{A}_n$, sondern auch „frühere“ Aussagen

- z. B. $\mathcal{A}_{n-1}$ (falls n groß genug!?)
- z. B. *alle* Aussagen $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$

manchmal „mehrere Induktionsanfänge“, z. B.

- Induktionsanfang: zeige $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind wahr

diese Varianten kann man in das Originalschema pressen

Verallgemeinerung vollständiger Induktion — mit Rückgriff auf viele frühere Formeln

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{B}_n$ eine Aussage

wollen beweisen: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{B}(n)$ wahr

definiere Aussage $\mathcal{A}_n$ so:
„Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ ist $\mathcal{B}_i$ wahr."

beweise: für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr

- das reicht, denn aus $\mathcal{A}_n$ folgt $\mathcal{B}_n$

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

Aussagen $\mathcal{B}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$\mathcal{A}_n$: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."

Induktionsbeweis für „Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}_n$ wahr."

- Induktionsanfang $n = 0$: müssen zeigen:
  $\mathcal{A}_0$, also „für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq 0$ gilt $\mathcal{B}_i$, also $\mathcal{B}_0$.
- Induktionsschritt $n \leadsto n + 1$: es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass die
  - Induktionsvoraussetzung gilt:
    - $\mathcal{A}_n$, also „für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$"
  - zeige $\mathcal{A}_{n+1}$, also „für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n + 1$ gilt $\mathcal{B}_i$"

Eine Verallgemeinerung vollständiger Induktion

Aussagen $\mathcal{B}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$\mathcal{A}_n$: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."

Induktionsschritt $n \rightsquigarrow n+1$: es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass die
Induktionsvoraussetzung gilt:
$\mathcal{A}_n$, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."
zeige $\mathcal{A}_{n+1}$, also „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n+1$ gilt $\mathcal{B}_i$".

$\mathcal{A}_{n+1}$ ist: „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$ und es gilt $\mathcal{B}_{n+1}$."
– „Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$.": gilt nach IV
– $\mathcal{B}_{n+1}$: hier muss man was tun, *darf aber IV benutzen:*
„Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq n$ gilt $\mathcal{B}_i$."

Wo sind wir?

Vollständige Induktion

Varianten vollständiger Induktion

Induktive Definitionen

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Definition:

$$
\begin{aligned}
w^0 &= \varepsilon \\
\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \ w^{n+1} &= w^n \cdot w
\end{aligned}
$$

sinnvolle Festlegung?

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Definition:

$$\begin{aligned} w^0 &= \varepsilon \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} &= w^n \cdot w \end{aligned}$$

sinnvolle Festlegung?

- wird für jedes n etwas festgelegt, was w^n sein könnte?
- ist das immer eindeutig?

Beispiel — noch mal Potenzen von Wörtern

Definition:

$$w^0 = \varepsilon$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : \; w^{n+1} = w^n \cdot w$$

sinnvolle Festlegung?

- wird für jedes n etwas festgelegt, was w^n sein könnte?
- ist das immer eindeutig?

vollständige Induktion:

- für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wird w^n festgelegt

Ackermann-Funktion — auch induktiv definiert

die Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- ist so definiert (Fassung von Rósza Péter)

$$\begin{aligned}
\text{für jedes } y \in \mathbb{N}_0: \quad && A(0,y) &= y+1 \\
\text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0: \quad && A(x+1,0) &= A(x,1) \\
\text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0: \quad && A(x+1,y+1) &= A(x,A(x+1,y))
\end{aligned}$$

Ackermann-Funktion — auch induktiv definiert

die Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- ist so definiert (Fassung von Rósza Péter)

$$\begin{aligned}
\text{für jedes } y \in \mathbb{N}_0: \quad && A(0, y) &= y + 1 \\
\text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0: \quad && A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\
\text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0: \quad && A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y))
\end{aligned}$$

- Vorsicht beim Rechnen!

$$\begin{aligned}
A(2, 2) &= A(1, A(2, 1)) = A(1, A(1, A(2, 0))) \\
&= A(1, A(1, A(1, 1))) = A(1, A(1, A(0, A(1, 0)))) \\
&= A(1, A(1, A(0, A(0, 1)))) = A(1, A(1, A(0, 2))) \\
&= A(1, A(1, 3)) = A(1, A(0, A(1, 2))) \\
&= A(1, A(0, A(0, A(1, 1)))) = A(1, A(0, A(0, A(0, A(1, 0))))) \\
&= A(1, A(0, A(0, A(0, A(0, 1))))) = A(1, A(0, A(0, A(0, 2)))) \\
&= A(1, A(0, A(0, 3))) = A(1, A(0, 4)) = A(1, 5) = \cdots
\end{aligned}$$

Ackermann-Funktion — alles definiert?

$A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- für jedes $y \in \mathbb{N}_0$: $A(0, y) = y + 1$
  für jedes $x \in \mathbb{N}_0$: $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$
  für jedes $x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0$: $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$

$A(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ und jedes $y \in \mathbb{N}_0$ definiert?

Ackermann-Funktion — alles definiert?

$A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- $$\begin{aligned} \text{für jedes } y \in \mathbb{N}_0: \quad & A(0, y) = y + 1 \\ \text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0: \quad & A(x + 1, 0) = A(x, 1) \\ \text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0: \quad & A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

$A(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ und jedes $y \in \mathbb{N}_0$ definiert?

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$	
$x = 0$	$A(0, 0)$	$A(0, 1)$	$A(0, 2)$	$A(0, 3)$	$A(0, 4)$	$\cdots$
$x = 1$	$A(1, 0)$	$A(1, 1)$	$A(1, 2)$	$A(1, 3)$	$A(1, 4)$	$\cdots$
$x = 2$	$A(2, 0)$	$A(2, 1)$	$A(2, 2)$	$A(2, 3)$	$A(2, 4)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Ackermann-Funktion — alles definiert?

$A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- $$\begin{aligned} \text{für jedes } y \in \mathbb{N}_0\text{:} \quad & A(0, y) = y + 1 \\ \text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0\text{:} \quad & A(x + 1, 0) = A(x, 1) \\ \text{für jedes } x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0\text{:} \quad & A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

$A(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ und jedes $y \in \mathbb{N}_0$ definiert?

zwei Induktionsbeweise „ineinander geschachtelt“

- „außen“ Induktion über x
- „innen“ Induktion über y zweimal
  - im Induktionsanfang für $x = 0$
  - im Induktionsschritt für $x \rightsquigarrow x + 1$