

5 AUSSAGENLOGIK

5.1 INFORMELLE GRUNDLAGEN

Im früheren Kapiteln haben wir deutsche Sätze wie z. B. den folgenden geschrieben:

„Die Abbildung $U : A_U \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist injektiv.“

Das ist eine Aussage. Sie ist *wahr*.

„Die Abbildung $U : A_U \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist surjektiv.“

ist auch eine Aussage. Sie ist aber *falsch* und deswegen haben wir sie auch nicht getroffen.

Aussagen sind Sätze, die „objektiv“ wahr oder falsch sind. Allerdings bedarf es dazu offensichtlich einer Interpretation der Zeichen, aus denen die zugrunde liegende Nachricht zusammengesetzt ist.

Der klassischen Aussagenlogik liegen zwei wesentliche Annahmen zugrunde. Die erste ist:

- Jede Aussage ist entweder falsch oder wahr.

Man spricht auch von der *Zweiwertigkeit* der Aussagenlogik. Eine Aussage kann nicht sowohl falsch als auch wahr sein, und es gibt auch keine anderen Möglichkeiten. Wenn etwas nicht entweder wahr oder falsch ist, dann ist es keine Aussage. Überlegen Sie sich, ob Ihnen Formulierungen einfallen, die keine Aussagen sind.

Zweiwertigkeit der Aussagenlogik

Außerdem bauen wir natürlich in dieser Vorlesung ganz massiv darauf, dass es keine Missverständnisse durch unterschiedliche Interpretationsmöglichkeiten einer Aussage gibt, damit auch klar ist, ob sie wahr oder falsch ist.

Häufig setzt man aus einfachen Aussagen, im folgenden kurz mit P und Q bezeichnet, kompliziertere auf eine der folgenden Arten zusammen:

- **Negation:** „Nicht P “
- **logisches Und:** „ P und Q “
- **logisches Oder:** „ P oder Q “
- **logische Folgerung:** „Wenn P , dann Q “

Die zweite Grundlage der Aussagenlogik ist dies:

- Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen eindeutig festgelegt.

Ob so eine zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist, soll also insbesondere *nicht* vom konkreten Inhalt der Aussagen abhängen! Das betrifft auch die aussagenlogische Folgerung. Sind zum Beispiel die Aussagen

P : „Im Jahr 2014 wurden in Japan etwa 4.7 Millionen PkW neu zugelassen.“¹ und

¹<http://de.statista.com/statistik/daten/studie/279897/umfrage/pkw-neuzulassungen-in-japan/>

Q: „Im Jahr 1999 gab es in Deutschland etwa 11.2 Millionen Internet-Nutzer“²
gegeben, dann soll „Wenn P, dann Q“

- erstens tatsächlich eine Aussage sein, die wahr oder falsch ist, obwohl natürlich *kein* kausaler Zusammenhang zwischen den genannten Themen existiert und
- zweitens soll der Wahrheitswert dieser Aussage nur von den Wahrheitswerten der Aussagen P und Q abhängen (und wie wir sehen werden im vorliegenden Beispiel *wahr* sein).

Da in der Aussagenlogik nur eine Rolle spielt, welche Wahrheitswerte die elementaren Aussagen haben, aus denen kompliziertere Aussagen zusammengesetzt sind, beschränkt und beschäftigt man sich dann in der Aussagenlogik mit sogenannten *aussagenlogischen Formeln*, die nach Regeln ähnlich den oben genannten zusammengesetzt sind und bei denen statt elementarer Aussagen einfach *Aussagevariablen* stehen, die als Werte „wahr“ und „falsch“ haben können.

*aussagenlogische
Formeln
Aussagevariablen*

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 5.2 werden wir definieren, wie aussagenlogische Formeln syntaktisch aufgebaut sind. Wir werden das zunächst auf eine Art und Weise tun, für die uns schon alle Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Eine andere, in der Informatik weit verbreitete Vorgehensweise werden wir im Kapitel über kontextfreie Grammatiken kennenlernen. In Abschnitt 5.3 führen wir sogenannte boolesche Funktionen ein. Sie werden dann in Abschnitt 5.4 benutzt, um die Semantik, d. h. die Bedeutung, aussagenlogischer Formeln zu definieren.

In diesem Kapitel orientieren wir uns stark am Skriptum zur Vorlesung „Formale Systeme“ von Schmitt (2013).

5.2 SYNTAX AUSSAGENLOGISCHER FORMELN

Grundlage für den Aufbau aussagenlogischer Formeln ist ein Alphabet

$$A_{AL} = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \} \cup Var_{AL} .$$

*aussagen-
logische
Konnektive*

Die vier Symbole \neg , \wedge , \vee und \rightarrow heißen auch *aussagenlogische Konnektive*. Und Var_{AL} ist ein Alphabet, dessen Elemente wir *aussagenlogische Variablen* nennen. Wir notieren sie in der Form P_i , mit $i \in \mathbb{N}_0$. Weil schon bei kleinen Beispielen die Lesbarkeit durch die Indizes unnötig beeinträchtigt wird, erlauben wir, als Abkürzungen für P_0 , P_1 , P_2 und P_3 einfach P , Q , R und S zu benutzen.

²<http://de.statista.com/statistik/daten/studie/36146/umfrage/anzahl-der-internetnutzer-in-deutschland-seit-1997/>

Die Menge der syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln soll nun definiert werden als eine formale Sprache For_{AL} über einem Alphabet A_{AL} , also als Teilmenge von A_{AL}^* .

Eine erste Forderung ist, dass stets $Var_{AL} \subseteq For_{AL}$ sein soll. Damit ist also jede aussagenlogische Variable eine aussagenlogische Formel.

Als zweites wollen wir nun definieren, dass man aus „einfacheren“ aussagenlogischen Formeln „kompliziertere“ zusammensetzen kann. Für die verschiedenen Möglichkeiten definieren wir uns vier Funktionen:

$$\begin{aligned} f_{\neg} : A_{AL}^* &\rightarrow A_{AL}^* : G \mapsto (\neg G) \\ f_{\wedge} : A_{AL}^* \times A_{AL}^* &\rightarrow A_{AL}^* : (G, H) \mapsto (G \wedge H) \\ f_{\vee} : A_{AL}^* \times A_{AL}^* &\rightarrow A_{AL}^* : (G, H) \mapsto (G \vee H) \\ f_{\rightarrow} : A_{AL}^* \times A_{AL}^* &\rightarrow A_{AL}^* : (G, H) \mapsto (G \rightarrow H) \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die Funktionswerte jeweils definiert durch geeignete Konkationen von Argumenten und Symbolen aus dem Alphabet der Aussagenlogik. Ein sinnvolles Beispiel ist

$$f_{\wedge}((P \rightarrow Q), R) = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$$

Ein für unser Vorhaben sinnloses Beispiel ist

$$f_{\wedge}(\neg \rightarrow, R \vee) = (\neg \rightarrow) \wedge R \vee$$

Wie man sieht, führt jede Anwendung einer der Abbildungen dazu, dass die Anzahl der Konnektive um eins größer wird als die Summe der Anzahlen der Konnektive in den Argumenten.

Für die aussagenlogischen Formeln ist es üblich, sie wie folgt zu lesen:

$$\begin{aligned} (\neg G) &\text{ „nicht } G\text{“} \\ (G \wedge H) &\text{ „} G \text{ und } H\text{“} \\ (G \vee H) &\text{ „} G \text{ oder } H\text{“} \\ (G \rightarrow H) &\text{ „} G \text{ impliziert } H\text{“ (oder „aus } G \text{ folgt } H\text{“)} \end{aligned}$$

Wir definieren nun induktiv unendlich viele Mengen wie folgt:

$$\begin{aligned} M_0 &= Var_{AL} \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 : M_{n+1} &= M_n \cup f_{\neg}(M_n) \\ &\quad \cup f_{\wedge}(M_n \times M_n) \cup f_{\vee}(M_n \times M_n) \cup f_{\rightarrow}(M_n \times M_n) \\ For_{AL} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i \end{aligned}$$

Menge der
aussagenlogischen
Formeln

Die formale Sprache For_{AL} ist die Menge der aussagenlogischen Formeln für die Variablenmenge Var_{AL} . Wie man anhand der Konstruktion in der zweiten Zeile sieht, ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ stets $M_n \subseteq M_{n+1}$. Die Mengen werden also „immer größer“. Außerdem enthält jedes M_n und damit auch For_{AL} nur Aussagevariablen sowie Werte der vier involvierten Abbildungen, die entstehen können, wenn die Argumente aussagenlogische Formeln sind. Wenn man also für alle aussagenlogischen Formeln etwas definieren möchte, dann genügt es auch, das nur für Aussagevariablen sowie Werte der vier involvierten Abbildungen zu tun, die entstehen können, wenn die Argumente aussagenlogische Formeln sind.

Um die Konstruktion von For_{AL} noch ein bisschen besser zu verstehen, beginnen wir der Einfachheit halber einmal mit $Var_{AL} = \{P, Q\}$. Dann ist also

$$M_0 = \{P, Q\}.$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} f_{\neg}(M_0) &= \{(\neg P), (\neg Q)\} \\ f_{\wedge}(M_0 \times M_0) &= \{(P \wedge P), (P \wedge Q), (Q \wedge P), (Q \wedge Q)\} \\ f_{\vee}(M_0 \times M_0) &= \{(P \vee P), (P \vee Q), (Q \vee P), (Q \vee Q)\} \\ f_{\rightarrow}(M_0 \times M_0) &= \{(P \rightarrow P), (P \rightarrow Q), (Q \rightarrow P), (Q \rightarrow Q)\} \end{aligned}$$

und folglich ist

$$\begin{aligned} M_1 = \{ &P, Q, \\ &(\neg P), (\neg Q), \\ &(P \wedge P), (P \wedge Q), (Q \wedge P), (Q \wedge Q), \\ &(P \vee P), (P \vee Q), (Q \vee P), (Q \vee Q), \\ &(P \rightarrow P), (P \rightarrow Q), (Q \rightarrow P), (Q \rightarrow Q)\} \end{aligned}$$

Für M_2 ergeben sich bereits so viele Formeln, dass man sie gar nicht mehr alle hinschreiben will. Beispiele sind $(\neg(\neg P))$, $((P \rightarrow Q) \wedge P)$ oder $(Q \vee (\neg Q))$.

Weil es nützlich ist, führen wir noch eine Abkürzung ein. Sind G und H zwei aussagenlogische Formeln, so stehe $(G \leftrightarrow H)$ für $((G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G))$.

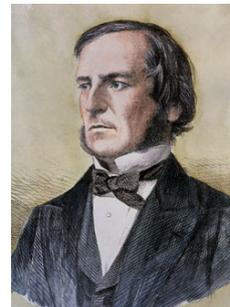
So, wie wir aussagenlogische Formeln definiert haben, ist zwar $(P \rightarrow Q)$ eine, aber $P \rightarrow Q$ nicht. (Wie könnte man das leicht beweisen?) Und bei größeren Formeln verliert man wegen der vielen Klammern leicht den Überblick. Deswegen erlauben wir folgende Abkürzungen bei der Notation aussagenlogischer Formeln. (Ihre „offizielle“ Syntax bleibt die gleiche!)

- Die äußerten umschließenden Klammern darf man immer weglassen. Zum Beispiel ist $P \rightarrow Q$ die Kurzform von $(P \rightarrow Q)$.

- Wenn ohne jede Klammern zwischen mehrere Aussagevariablen immer das gleiche Konnektiv steht, dann bedeute das „implizite Linksklammerung“. Zum Beispiel ist $P \wedge Q \wedge R$ die Kurzform von $((P \wedge Q) \wedge R)$.
- Wenn ohne jede Klammern zwischen mehrere Aussagevariablen verschiedene Konnektive stehen, dann ist von folgenden „Bindungsstärken“ der Konnektive auszugehen:
 - a) \neg bindet am stärksten
 - b) \wedge bindet am zweitstärksten
 - c) \vee bindet am drittstärksten
 - d) \rightarrow bindet am viertstärksten
 - e) \leftrightarrow bindet am schwächsten
 Zum Beispiel ist $P \vee R \rightarrow \neg Q \wedge R$ die Kurzform von $((P \vee R) \rightarrow ((\neg Q) \wedge R))$.

5.3 BOOLESCHE FUNKTIONEN

Der britische Mathematiker George Boole (1815–1864) hat mit seinem heutzutage [online](#) verfügbaren Buch „*An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*“ (Boole 1854) die Grundlagen für die sogenannte *algebraische Logik* oder auch *boolesche Algebra* gelegt. Dabei griff er die weiter vorne erwähnte Grundlage der Aussagenlogik auf, dass der Wahrheitswert einer Aussage nur von den Wahrheitswerten seiner Teilformeln abhängt. Was Boole neu hinzunahm, war die Idee, in Anlehnung an arithmetische Ausdrücke auch „boolesche Ausdrücke“ einschließlich „Variablen“ zu erlauben und solche Ausdrücke umzuformen analog zu den gewohnten Umformungen bei arithmetischen Ausdrücken.



Im weiteren Verlauf schreiben wir für die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ kurz **w** und **f** und bezeichnen die Menge mit diesen beiden Werten als $\mathbb{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$.

Eine *boolesche Funktion* ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$. In der nachfolgenden Tabelle sind einige „typische“ boolesche Funktionen aufgeführt, die wir zunächst einmal mit b_{\neg} , b_{\wedge} , b_{\vee} und b_{\rightarrow} bezeichnen:

boolesche Funktion

x_1	x_2	$b_{\neg}(x_1)$	$b_{\wedge}(x_1, x_2)$	$b_{\vee}(x_1, x_2)$	$b_{\rightarrow}(x_1, x_2)$
f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
w	w	f	w	w	w

Üblicher ist es allerdings, die Abbildungen b_{\wedge} und b_{\vee} mit einem Infixoperator zu schreiben und b_{\neg} wird auch anders notiert. Dabei findet man (mindestens) zwei Varianten. In der nachfolgenden Tabelle sind die Möglichkeiten nebeneinander gestellt und auch gleich noch übliche Namen bzw. Sprechweisen mit angegeben:

$b_{\neg}(x)$	$\neg x$	\bar{x}	Negation bzw. Nicht
$b_{\wedge}(x, y)$	$x \wedge y$	$x \cdot y$	Und
$b_{\vee}(x, y)$	$x \vee y$	$x + y$	Oder
$b_{\rightarrow}(x, y)$			Implikation

Die an Arithmetik erinnernde Notationsmöglichkeit geht oft einher mit der Benutzung von 0 statt **f** und 1 statt **w**.

Das meiste, was durch die Definitionen dieser booleschen Abbildungen ausgedrückt wird, ist aus dem alltäglichen Leben vertraut. Nur auf wenige Punkte wollen wir explizit eingehen:

- Das „Oder“ ist „inklusive“ (und nicht „exklusiv“): Auch wenn x und y beide wahr sind, ist $x \vee y$ wahr.
- Bei der Implikationsabbildung ist $b_{\rightarrow}(x, y)$ auf jeden Fall wahr, wenn $x = \mathbf{f}$ ist, unabhängig vom Wert von y , insbesondere auch dann, wenn $y = \mathbf{f}$ ist.
- Für jedes $x \in \mathbb{B}$ haben beiden Abbildungen b_{\wedge} und b_{\vee} die Eigenschaft, dass $b_{\wedge}(x, x) = b_{\vee}(x, x) = x$ ist, und für b_{\rightarrow} gilt $b_{\rightarrow}(x, x) = \mathbf{w}$.

Natürlich gibt es zum Beispiel insgesamt $2^{2^2} = 16$ zweistellige boolesche Funktionen. Die obigen sind aber ausreichend, um auch jede der anderen durch Hintereinanderausführung der genannten zu realisieren. Zum Beispiel ist $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B} : (x, y) \mapsto b_{\vee}(b_{\neg}(x), x)$ die Abbildung, die konstant **w** ist.

Für die Abbildung b_{\rightarrow} hat sich übrigens keine Operatorschreibweise durchgesetzt. Man kann sich aber klar machen, dass für jedes $x, y \in \mathbb{B}$ gilt: $b_{\rightarrow}(x, y) = b_{\vee}(b_{\neg}(x), y)$ ist. Eine Möglichkeit besteht darin, in einer Tabelle für alle möglichen Kombinationen von Werten für x und y die booleschen Ausdrücke auszuwerten:

x	y	$b_{\neg}(x)$	$b_{\vee}(b_{\neg}(x), y)$	$b_{\rightarrow}(x, y)$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
w	w	f	w	w

5.4 SEMANTIK AUSSAGENLOGISCHER FORMELN

Unser Ziel ist es nun, jeder aussagenlogischen Formel im wesentlichen eine boolesche Funktion als Bedeutung zuzuordnen.

Eine *Interpretation* einer Menge V von Aussagevariablen ist eine Abbildung $I : V \rightarrow \mathbb{B}$. Die Menge aller Interpretationen einer Variablenmenge V ist also \mathbb{B}^V . Das kann man sich z. B. vorstellen als eine Tabelle mit je einer Spalte für jede Variable $X \in V$ und je einer Zeile für jede Interpretation I , wobei der Eintrag in „Zeile I “ und „Spalte X “ gerade $I(X)$ ist. Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft den Fall $V = \{P_1, P_2, P_3\}$. Machen Sie sich klar, dass es für jede Variablenmenge mit $k \in \mathbb{N}_+$ Aussagevariablen gerade 2^k Interpretationen gibt.

P_1	P_2	P_3
f	f	f
f	f	w
f	w	f
f	w	w
w	f	f
w	f	w
w	w	f
w	w	w

Abbildung 5.1: Alle Interpretationen der Menge $V = \{P_1, P_2, P_3\}$ von Aussagevariablen.

Jede Interpretation I legt eine Auswertung $val_I(F)$ jeder aussagenlogischen Formel $F \in For_{AL}$ fest: Für jedes $X \in Var_{AL}$ und für jede aussagenlogische Formel G und H gelte:

$$\begin{aligned}
 val_I(X) &= I(X) \\
 val_I(\neg G) &= b_{\neg}(val_I(G)) \\
 val_I(G \wedge H) &= b_{\wedge}(val_I(G), val_I(H)) \\
 val_I(G \vee H) &= b_{\vee}(val_I(G), val_I(H)) \\
 val_I(G \rightarrow H) &= b_{\rightarrow}(val_I(G), val_I(H))
 \end{aligned}$$

Das meiste, was hier zum Ausdruck gebracht wird, ist aus dem alltäglichen Leben vertraut. Nur auf wenige Punkte wollen wir explizit eingehen:

- Man kann für komplizierte Aussagen anhand der obigen Definition „ausrechnen“, ob sie für eine Interpretation wahr oder falsch ist, weil jede aussagenlogische Formel nur durch Anwendung von genau einer erlaubten Abbildungen entstehen kann. Für die Interpretation I mit $I(P) = w$ und $I(Q) = f$ ergäbe die Anwendung der obigen Definition von val_I auf die Formel $\neg(P \wedge Q)$

z. B. schrittweise:

$$\begin{aligned}
 \text{val}_I(\neg(P \wedge Q)) &= \neg(\text{val}_I(P \wedge Q)) \\
 &= \neg(\text{val}_I(P) \wedge \text{val}_I(Q)) \\
 &= \neg(I(P) \wedge I(Q)) \\
 &= \neg(\mathbf{w} \wedge \mathbf{f}) \\
 &= \neg(\mathbf{f}) \\
 &= \mathbf{w}
 \end{aligned}$$

Oft interessiert man sich dafür, was für *jede* Interpretation der Variablen einer Formel passiert. Dann ergänzt man die Tabelle aller Interpretationen um weitere Spalten mit den Werten von $\text{val}_I(G)$. Hier ist ein Beispiel:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
f	f	w	w	w	f	w
f	w	w	f	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w
w	w	f	f	f	w	f

äquivalente
Aussagen

- Die Tabelle zeigt, dass die Aussagen $\neg(P \wedge Q)$ und $\neg P \vee \neg Q$ für alle Interpretationen denselben Wahrheitswert annehmen. Solche Aussagen nennt man *äquivalent*. Gleiches gilt für $\neg \neg P$ und P und viele weitere Paare von aussagenlogischen Formeln.

Wenn zwei Formeln G und H äquivalent sind, dann schreiben wir auch $G \equiv H$.

- Noch eine Anmerkung zur Implikation. So wie $b \rightarrow$ definiert wurde ist eine Aussage $P \rightarrow Q$ genau dann wahr, wenn P falsch ist oder Q wahr. Warum das sinnvoll ist, wird unter Umständen noch etwas klarer, wenn man überlegt, wie man denn die Tatsache umschreiben wollte, dass eine Implikation im naiven Sinne, also „aus P folgt Q “, *nicht* zutrifft. Das ist doch wohl dann der Fall, wenn zwar P zutrifft, aber Q nicht. Also sollte $P \rightarrow Q$ äquivalent zu $\neg(P \wedge \neg Q)$, und das ist nach obigem äquivalent zu $(\neg P) \vee (\neg \neg Q)$ und das zu $(\neg P) \vee Q$.

Man kann nun noch einen letzten Schritt tun und mit jeder aussagenlogische Formel G eine Abbildung assoziieren, die für jede (passende) Interpretation die ausgewertete Formel als Wert zuweist. Wir gehen in zwei Schritten vor. Als erstes sei V eine Menge von aussagenlogischen Variablen, die alle in G vorkommenden

Variablen enthält. Dann kann man die folgende Abbildung definieren:

$$\mathbb{B}^V \rightarrow \mathbb{B} : I \mapsto \text{val}_I(G).$$

Das ist ganz genau genommen noch keine boolesche Abbildung, weil der Definitionsbereich nicht ein kartesisches Produkt \mathbb{B}^k ist, sondern eben die Menge aller Abbildungen von V in \mathbb{B} .

Konsequenz ist auch, dass zum Beispiel die Formeln $G = P_0 \wedge P_0$ und $H = P_2 \wedge P_2$ nicht äquivalent sind. Das sieht man an einer Interpretation I mit $I(P_0) = \mathbf{w}$ und $I(P_2) = \mathbf{f}$. Für sie ist $\text{val}_I(G) = \mathbf{w}$, aber $\text{val}_I(H) = \mathbf{f}$. Man kann sich aber durchaus auf den Standpunkt stellen, dass es einen „Kern“ gibt, der von den konkreten Namen der Aussagevariablen unabhängig und bei beiden Formeln gleich ist.

Um diesen „Kern“ herauszuarbeiten, kann man verschiedene Wege gehen. Einer, dem wir nicht folgen werden, besteht darin, zu verlangen, dass in jeder Formel G für eine geeignete nichtnegative ganze Zahl k die Nummern der in G vorkommenden Aussagevariablen gerade die Zahlen in \mathbb{Z}_n sein müssen. Falls das nicht der Fall ist, müsste man also immer Variablen umbenennen.

Wir bevorzugen eine Alternative, bei der man sozusagen auch noch die Namen der Aussagevariablen „vergisst“. Das formalisieren wir so: Da wir vorge setzt haben, dass alle Aussagevariablen von der Form P_i sind, können wir den Variablen in V auch eine Reihenfolge geben. Dazu seien einfach für $k = |V| \geq 1$ die Zahlen $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0$ die Indizes der Variablen in V , und zwar seien sie so gewählt, dass für jedes $j \in \mathbb{P}_{k-1}$ gelte: $i_j < i_{j+1}$. Jedem k -Tupel $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{B}^k$ entspricht dann in naheliegender Weise die Interpretation

$$I_x : P_{i_j} \mapsto x_j.$$

Damit ist dann die durch eine aussagenlogische Formel G beschriebene Abbildung diejenige mit $\mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B} : x \mapsto \text{val}_{I_x}(G)$.

Ist I eine Interpretation für eine aussagenlogische Formel G , dann nennen wir I ein *Modell* von G , wenn $\text{val}_I(G) = \mathbf{w}$ ist. Ist I eine Interpretation für eine Menge Γ aussagenlogischer Formeln, dann nennen wir I ein *Modell* von Γ , wenn I Modell jeder Formel $G \in \Gamma$ ist.

Modell einer Formel

Modell einer Formelmenge

Ist Γ eine Menge aussagenlogischer Formeln und G ebenfalls eine, so schreibt man auch genau dann $\Gamma \models G$, wenn jedes Modell von Γ auch Modell von G ist. Enthält $\Gamma = \{H\}$ nur eine einzige Formel, schreibt man einfach $H \models G$. Ist $\Gamma = \{\}$ die leere Menge, schreibt man einfach $\models G$. Die Bedeutung soll in diesem Fall sein, dass G für *alle* Interpretationen überhaupt wahr ist, d.h. dass G eine Tautologie ist.

erfüllbare
Formel

Es zeigt sich, dass in verschiedenen Teilen der Informatik zwei Sorten aussagenlogischer Formeln von Bedeutung sind. Die eine wichtige Klasse von Formeln sind *erfüllbare Formeln*, d. h. Formeln, die für mindestens eine Interpretation wahr sind. Die Untersuchung aussagenlogischer Formeln auf Erfüllbarkeit spielt in einigen Anwendungen eine große Rolle. Für manche Formeln ist das ganz einfach, für andere anscheinend nicht. Vergleichen Sie einfach mal die Formeln $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ und $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R)$ in dieser Hinsicht. In der Vorlesung „Theoretische Grundlagen der Informatik“ werden Sie mehr zum Thema Erfüllbarkeit erfahren.

Das andere sind *Tautologien*; das sind Formeln, für die *jede* Interpretation ein Modell ist, die also für jede Interpretation wahr sind. Sie heißen auch *allgemeingültige Formeln*. Solche Formeln gibt es, z. B. $P \vee \neg P$ oder $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$. Sie werden auch im nächsten Abschnitt noch eine wichtige Rolle spielen.

Tautologie

allgemeingültige
Formel

Zum Abschluss dieses Abschnitts geht es erst einmal darum, eine ganze Reihe von Tautologien kennenzulernen und auch Methoden, sich neue zu beschaffen.

Als erstes betrachten wir eine Formel der Form $G \leftrightarrow H$. Das wurde eingeführt als Abkürzung für $G \rightarrow H \wedge H \rightarrow G$. Für jede Interpretation I ist

$$\begin{aligned} \text{val}_I(G \rightarrow H \wedge H \rightarrow G) &= \text{val}_I(G \rightarrow H) \wedge \text{val}_I(H \rightarrow G) \\ &= (\neg \text{val}_I(G) \vee \text{val}_I(H)) \wedge (\neg \text{val}_I(H) \vee \text{val}_I(G)) \end{aligned}$$

Falls nun G und H äquivalente Formeln sind, also für jede Interpretation I $\text{val}_I(G) = \text{val}_I(H)$ gilt, ergibt sich weiter

$$\text{val}_I(G \rightarrow H \wedge H \rightarrow G) = (\neg \text{val}_I(G) \vee \text{val}_I(G)) \wedge (\neg \text{val}_I(G) \vee \text{val}_I(G))$$

und gleichgültig, welchen Wert $\text{val}_I(G)$ hat ergibt die Auswertung letzten Endes immer $\text{val}_I(\dots) = \dots = \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Also gilt:

5.1 Lemma. Wenn G und H äquivalente aussagenlogische Formeln sind, dann ist die Formel $G \leftrightarrow H$ eine Tautologie.

Zusammen mit Einsichten in vorangegangenen Abschnitten zeigt das sofort, dass für beliebige Formeln G und H z. B. folgende Formeln Tautologien sind:

- $\neg \neg G \leftrightarrow G$
- $(G \rightarrow H) \leftrightarrow (\neg G \vee H)$
- $(G \rightarrow H) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)$
- $(G \wedge H) \leftrightarrow \neg(\neg G \vee \neg H)$ und $(G \vee H) \leftrightarrow \neg(\neg G \wedge \neg H)$
- $\neg(G \wedge H) \leftrightarrow (\neg G \vee \neg H)$ und $\neg(G \vee H) \leftrightarrow (\neg G \wedge \neg H)$

- $G \wedge G \leftrightarrow G$ und
 $G \vee G \leftrightarrow G$
- $G \wedge H \leftrightarrow H \wedge G$ und
 $G \vee H \leftrightarrow H \vee G$

Es gilt übrigens auch die Umkehrung der obigen Argumentation:

5.2 Lemma. Wenn für zwei aussagenlogische Formeln G und H die Formel $G \leftrightarrow H$ eine Tautologie ist, dann sind G und H äquivalente Formeln.

Außerdem überzeugt man sich schnell, dass auch Formeln des folgenden Aufbaus allgemeingültig sind für beliebige aussagenlogische Formeln G , H und K :

- $G \rightarrow G$
- $\neg G \vee G$
- $G \rightarrow (H \rightarrow G)$
- $(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K))$
- $((\neg H \rightarrow \neg G) \rightarrow ((\neg H \rightarrow G) \rightarrow H))$

5.5 BEWEISBARKEIT

Der grundlegende Begriff im Zusammenhang mit Beweisbarkeit sowohl in der Aussagenlogik als auch in der Prädikatenlogik ist der des Kalküls. Im Fall der Aussagenlogik gehören zu sogenannten *Aussagenkalkül* gehören dazu stets

- das Alphabet A_{AL} , aus dem die Zeichen für alle Formeln stammen,
- die Menge For_{AL} , der syntaktisch korrekten Formeln über dem Alphabet A_{AL} ,
- eine Menge sogenannter *Axiome* $Ax_{AL} \subseteq A_{AL}$,
- und sogenannte *Schlussregeln* oder *logische Folgerungsregeln*.

Als Axiome für das Aussagenkalkül wählen wir

$$Ax_{AL} = \{(G \rightarrow (H \rightarrow G)) \mid G, H \in For_{AL}\} \\ \cup \{(G \rightarrow (H \rightarrow K)) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow (G \rightarrow K)) \mid G, H, K \in For_{AL}\} \\ \cup \{(\neg H \rightarrow \neg G) \rightarrow ((\neg H \rightarrow G) \rightarrow H) \mid G, H \in For_{AL}\}$$

Die Formelmengen in den drei Zeilen wollen kurz mit Ax_{AL1} , Ax_{AL2} und Ax_{AL3} bezeichnen. Für alle drei Mengen haben wir schon erwähnt, dass sie nur Tautologien enthalten. (Überlegen Sie sich bitte auch selbst.) Die Axiome sind also alle Tautologien.

Im Fall der Aussagenlogik gibt es nur eine Schlussregel, den sogenannten *Modus Ponens*. Diese Regel kann man formalisieren als Relation $MP \subseteq For_{AL}^3$, nämlich

Modus Ponens

$$MP = \{(G \rightarrow H, G, H) \mid G, H \in For_{AL}\}$$

Bei Kalkülen schreibt man gelegentlich Ableitungsregeln in der speziellen Form auf. Beim Modus Ponens sieht das so aus:

$$MP: \frac{G \rightarrow H \quad G}{H}$$

Wie der Modus Ponens anzuwenden ist, ergibt sich bei der Definition dessen, was wir formal unter einer Ableitung bzw. unter einem Beweis verstehen wollen.

Hypothese

Dazu sei Γ eine Formelmenge sogenannter *Hypothesen* oder *Prämissen* und G eine Formel. Eine *Ableitung* von G aus Γ ist eine endliche Folge (G_1, \dots, G_n) von n Formeln mit der Eigenschaft, dass erstens $G_n = G$ ist und auf jede Formel G_i einer der folgenden Fälle zutrifft:

- Sie ist ein Axiom: $G_i \in Ax_{AL}$.
- Oder sie ist eine Prämisse: $G_i \in \Gamma$.
- Oder es gibt Indizes i_1 und i_2 echt kleiner i , für die gilt: $(G_{i_1}, G_{i_2}, G_i) \in MP$.

Wir schreiben dann $\Gamma \vdash G$. Ist $\Gamma = \{\}$, so heißt eine entsprechende Ableitung auch ein *Beweis* von G und G ein *Theorem* des Kalküls, in Zeichen: $\vdash G$.

Theorem

Wir wollen als erstes einen Beweis für die Formel $(P \rightarrow P)$ angeben. Dabei ist zum besseren Verständnis in jeder Zeile in Kurzform eine Begründung dafür angegeben, weshalb die jeweilige Formel an dieser Stelle im Beweis aufgeführt werden darf.

1. $((P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)))$ Ax_{AL2}
2. $(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P))$ Ax_{AL1}
3. $((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$ $MP(1,2)$
4. $(P \rightarrow (P \rightarrow P))$ Ax_{AL1}
5. $(P \rightarrow P)$ $MP(3,4)$

Wenn man in diesem Beweis überall statt P eine andere aussagenlogische Formel G notieren würde, erhielte man offensichtlich einen Beweis für $G \rightarrow G$.

Beweisschema

Man spricht in einem solchen Fall von einem *Beweisschema*. Wir werden uns aber erlauben, im folgenden auch in solchen Fällen lax von Beweisen zu sprechen. Auch der folgende Beweis ist nicht besonders lang:

1. $(\neg P \rightarrow \neg P) \rightarrow ((\neg P \rightarrow P) \rightarrow P)$ Ax_{AL3}
2. $(\neg P \rightarrow \neg P)$ Beispiel von eben
3. $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$ $MP(1,2)$

Genaugenommen müsste man allerdings statt der Zeile 2 die fünf Zeilen von eben übernehmen und überall P durch $\neg P$ ersetzen. Aber so wie man Programme strukturiert, indem man größere Teile aus kleineren zusammensetzt, macht man das bei Beweisen auch. Insbesondere dann, wenn man kleinere Teil mehrfach verwenden kann.

Wir hatten schon darauf hingewiesen, dass alle Formeln in Ax_{AL} Tautologien sind. Sehen wir uns nun noch den Modus Ponens genauer an. Es gilt

5.3 Lemma. Modus Ponens „erhält Allgemeingültigkeit“, d. h. wenn sowohl $G \rightarrow H$ als auch G Tautologien sind, dann ist auch H eine Tautologie.

5.4 Beweis. Wenn $G \rightarrow H$ eine Tautologie ist, dann gilt für jede Bewertung I :

$$\mathbf{w} = \text{val}_I(G \rightarrow H) = b_{\rightarrow}(\text{val}_I(G), \text{val}_I(H)) .$$

Da G aber auch Tautologie ist, ist $\text{val}_I(G) = \mathbf{w}$ und folglich

$$b_{\rightarrow}(\text{val}_I(G), \text{val}_I(H)) = b_{\rightarrow}(\mathbf{w}, \text{val}_I(H)) = \text{val}_I(H)$$

Also ist $\mathbf{w} = \text{val}_I(H)$ für jede Bewertung I , also ist H Tautologie. ■

Da alle Axiome Tautologien sind und Modus Ponens Allgemeingültigkeit erhält, ergibt sich

5.5 Korollar. Alle Theorem des Aussagenkalküls sind Tautologien.

Schwieriger zu beweisen ist, dass die Umkehrung dieser Aussage auch gilt:

5.6 Lemma. Jede Tautologie ist im Aussagenkalkül beweisbar.

Zusammen mit Korollar 5.5 ergibt sich der folgende Satz.

5.7 Theorem Für jede Formel $G \in \text{For}_{AL}$ gilt $\models G$ genau dann, wenn $\vdash G$ gilt.

Wir werden Lemma 5.6 in diesem Kapitel nicht beweisen. Möglicherweise werden wir aber für ein verwandtes System (mit anderen Schlussregeln) sehen, dass man sogar Systeme bauen kann, für die man algorithmisch (d. h. also mit Rechner) für jede Formel

- herausfinden kann, ob sie Tautologie ist oder nicht und
- gegebenenfalls dann sogar auch gleich noch einen Beweis im Kalkül.

Man beachte, dass das nur in der Aussagenlogik so schön klappt. In der Prädikatenlogik, die wir in einem späteren Kapitel auch noch ansehen werden, ist das nicht mehr der Fall.

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Kapitel wurde zunächst die Syntax aussagenlogischer Formeln festgelegt. Anschließend haben wir ihre Semantik mit Hilfe boolescher Funktionen definiert. Und am Ende haben wir gesehen, wie man dem semantischen Begriff der Allgemeingültigkeit den syntaktischen Begriff der Beweisbarkeit so gegenüberstellen kann, dass sich die beiden entsprechen.

LITERATUR

- Boole, George (1854). *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. URL: <http://www.gutenberg.org/ebooks/15114> (besucht am 20. 10. 2015) (siehe S. 39).
- Schmitt, P. H. (2013). *Formale Systeme*. Vorlesungsskript. Institut für Theoretische Informatik, KIT. URL: <http://formal.iti.kit.edu/teaching/FormSysWS1415/skriptum.pdf> (besucht am 19. 10. 2015) (siehe S. 36).