10.2.2012

Willkommen zur fünfzehnten und letzten Übung zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

Karlsruhe Institute of Technology

Matthias Janke
email: matthias.janke ät kit.edu

Organisatorisches

- Anmeldung für den *Übungsschein* nicht vergessen!
- Gestern waren 699 Personen angemeldet

- Anmeldung für die *Klausur* nicht vergessen!
- Gestern waren 751 Personen angemeldet

- Anmeldung über Studierendenportal: studium.kit.edu
- Online Klausur-Anmeldung möglich für: INFO, INWI, MATH, PHYS

- Prozedere vor/während/nach Klausur: siehe Vorlesungsfolien vom 8. Februar

Überblick

Nerode-Äquivalenz

Verträglichkeit

Halbordnungen

Allerlei

Nerode-Äquivalenz

Definition:
$L \subseteq A^*$ ist beliebige formale Sprache
für alle $w_1, w_2 \in A^*$:

$$w_1 \equiv_L w_2 \Leftrightarrow (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \Leftrightarrow w_2 w \in L)$$

Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1. Geben Sie eine Menge an, die für jede Äquivalenzklasse A aus $\{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ ein Element $w \in A$ enthält.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

Es sei $L = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1. Geben Sie eine Menge an, die für jede Äquivalenzklasse A aus $\{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ ein Element $w \in A$ enthält.

Eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist
$\{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$.

Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.

Eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, ist
$\{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{a}^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathtt{ba}\}$.

Nerode-Äquivalenz

Es sei $L = \{a^n ba^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse $[w]_{\equiv_L} \in \{a, b\}^*_{/\equiv_L}$ die Menge $\{w' \in \{a, b\}^* | ww' \in L\}$ an.

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}\mathtt{a}^{n+k} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : w = \mathtt{a}^n\mathtt{b} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \{\mathtt{a}^n\}$.
- $w = \mathtt{ba} \Rightarrow \{w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid ww' \in L\} = \emptyset$.

und noch eine Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

und noch eine Beispielaufgabe:
Es sei $L = \{a^n b a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ und $\equiv_L$ die zugehörige Nerode-Äquivalenz.

1.
2.
3. Gibt es eine rechtslineare Grammatik G, mit $L(G) = L$? Begründen Sie!

Nein!
Da es unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen bezüglich der Nerode-Äquivalenz gibt, kann es keinen endlichen Akzeptor geben, der L erkennt, und damit kann es auch keine rechtslineare Grammatik geben, die L erzeugt.

Überblick

Verträglichkeit von Relationen

Zur Erinnerung:
Sei R Äquivalenzrelation und $\square$ eine binäre Operation jeweils auf M.

- R ist mit $\square$ verträglich, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ und für alle $y_1, y_2 \in M$ gilt:

$$x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Rightarrow (x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_2)$$

Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

Verträglichkeit

$x \sim y \iff x \ \texttt{div}\ 23 = y \ \texttt{div}\ 23$

1. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?

$x \sim y \iff x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23$

1. Ist $\sim$ verträglich mit Addition von $45, 46, 47$?

$1 + 45 \not\sim 0 + 45$

$x \sim y \Rightarrow x \texttt{ div } 23 = y \texttt{ div } 23 \Rightarrow x \texttt{ div } 23 + 2 = y \texttt{ div } 23 + 2 \Rightarrow$
$(x + 46) \texttt{ div } 23 = (y + 46) \texttt{ div } 23$

$22 + 47 \not\sim 21 + 47$

Verträglichkeit

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \land y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \land y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \land y \geq 23mk$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) + x \mod k < 23mk \leq y$$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$
$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) + x \mod k < 23mk \leq y$
$\Rightarrow x < 23mk \leq y$

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0 : x \texttt{ div } k < 23m \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow x \texttt{ div } k \leq 23m - 1 \wedge y \texttt{ div } k \geq 23m$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) \leq 23mk - k \wedge y \geq 23mk$$
$$\Rightarrow k(x \texttt{ div } k) + x \mod k < 23mk \leq y$$
$$\Rightarrow x \not\sim y$$

Verträglichkeit

1.
2. Ist $\sim$ verträglich mit Division durch $3, 4, 5$?

$x \texttt{ div } k \not\sim y \texttt{ div } k \Rightarrow x \not\sim y$

$\Rightarrow$

$x \sim y \Rightarrow x \texttt{ div } k \sim y \texttt{ div } k$

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\square : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x) \qquad \textbf{K}\text{-Regel}$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \square z) R (y \square z)$ gilt, ist $\square$ verträglich mit R.

Gegeben: Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\square : M \times M$ mit

$$\forall x, y \in M : (x \square y) R (y \square x) \qquad \textbf{K}\text{-Regel}$$

Zeigen Sie: Wenn $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \square z) R (y \square z)$ gilt, ist $\square$ verträglich mit R.

Zuerst einmal: Überlegen was ich zeigen muss!
Nach Definition der Verträglichkeit:

- $x_1 R x_2 \wedge y_1 R y_2 \Rightarrow (x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_2)$

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?
Ich nehme an es gilt:

- $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1)$
- $(x_1 \Box y_2) R (x_2 \Box y_2)$
- $(y_1 \Box x_1) R (y_2 \Box x_1)$
- $(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2)$

und folgere daraus die Verträglichkeit.

Also:

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

Was weiss ich aus der Aufgabenstellung?
Ich nehme an es gilt:

- $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1)$
- $(x_1 \Box y_2) R (x_2 \Box y_2)$
- $(y_1 \Box x_1) R (y_2 \Box x_1)$
- $(y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2)$

und folgere daraus die Verträglichkeit.
Außerdem weiss ich:

$$\forall x, y \in M : (x \Box y) R (y \Box x)$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$(x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_1)$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$\begin{aligned} & (x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_1) \\ \wedge & (x_2 \square y_1) R (y_1 \square x_2) \qquad \textbf{K}\text{-Regel} \end{aligned}$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \square y_1) R (x_2 \square y_1) \\
\wedge &(x_2 \square y_1) R (y_1 \square x_2) \qquad \textbf{K}\text{-Regel} \\
\wedge &(y_1 \square x_2) R (y_2 \square x_2)
\end{aligned}
$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$
\begin{array}{ll}
(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1) & \\
\wedge (x_2 \Box y_1) R (y_1 \Box x_2) & \textbf{K}\text{-Regel} \\
\wedge (y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2) & \\
\wedge (y_2 \Box x_2) R (x_2 \Box y_2) & \textbf{K}\text{-Regel}
\end{array}
$$

Wähle $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M$ mit $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$

$$
\begin{array}{ll}
(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_1) & \\
\wedge (x_2 \Box y_1) R (y_1 \Box x_2) & \textbf{K}\text{-Regel} \\
\wedge (y_1 \Box x_2) R (y_2 \Box x_2) & \\
\wedge (y_2 \Box x_2) R (x_2 \Box y_2) & \textbf{K}\text{-Regel}
\end{array}
$$

Also nach Transitivität: $(x_1 \Box y_1) R (x_2 \Box y_2)$.

Überblick

Halbordnungen sind:

- *reflexiv*,
- *transitiv*
- **antisymmetrisch**!

Achtung: antisymmetrisch $\neq$ nicht symmetrisch!

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs **minimales** Element!

$(M, \sqsubseteq)$ ist halbgeordnet, $T \subseteq M$

- $x \in T$ heisst *kleinstes* Element, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y$
- $x \in T$ heisst *minimales Element*, wenn es kein $y \in T$ gibt: $y \sqsubseteq x \wedge y \neq x$

Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

Aufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass in M genau ein minimales Element existiert, aber gleichzeitig kein kleinstes Element!

Halbordnungen

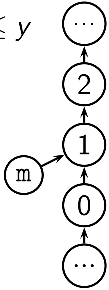
Auch nicht verwechseln:

kleinstes Element vs minimales Element!

Aufgabe:

Geben Sie Menge M mit Halbordnung $\sqsubseteq$ an, so dass in M genau ein minimales Element existiert, aber gleichzeitig kein kleinstes Element!

- $M = \mathbb{Z} \cup \{\mathtt{m}\}$
- $x, y \in \mathbb{Z} : x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\mathtt{m} \sqsubseteq z \Leftrightarrow z \geq 1$



Überblick

Unterschiedliche Beweisverfahren, die wir in GBI verwendet haben:

- Beweis durch vollständige/strukturelle Induktion
- Widerlegen durch Gegenbeispiel
- Indirekter Beweis:
    1. Negieren der Behauptung
    2. Das ganze weiterführen zu einem Widerspruch (z.B: $0 = 1$)
    3. Da alle Schritte korrekt waren, muss Annahme falsch gewesen sein und die ursprüngliche Behauptung korrekt.
- Zeige: $A \Rightarrow B$, indem ich annehme A gilt und daraus B folgere.
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Beweisverfahren

Unterschiedliche Beweisverfahren, die wir in GBI verwendet haben:

- Beweis durch vollständige/strukturelle Induktion
- Widerlegen durch Gegenbeispiel
- Indirekter Beweis:
    1. Negieren der Behauptung
    2. Das ganze weiterführen zu einem Widerspruch (z.B: $0 = 1$)
    3. Da alle Schritte korrekt waren, muss Annahme falsch gewesen sein und die ursprüngliche Behauptung korrekt.

  Achtung bei den einzelnen Schritten!

  Beispiel: Behauptung: 42 ist die größte Zahl!

Achtung bei den einzelnen Schritten!

Beispiel: Behauptung: 42 ist die größte Zahl!

indirekter Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch, also es gibt eine andere größte Zahl y.

$$\begin{aligned} 42 &< y \\ 42y &< y^2 \\ y &< \frac{y^2}{42} \end{aligned}$$

Das ist aber Widerspruch, da y größte Zahl ist!
$\Rightarrow$ 42 ist größte Zahl!
DAS IST FALSCH!!!!

Beispiel: Behauptung: 42 ist die größte Zahl!

indirekter Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch, also es gibt eine andere größte Zahl y.

$$\begin{aligned} 42 &< y \\ 42y &< y^2 \\ y &< \frac{y^2}{42} \end{aligned}$$

Das ist aber Widerspruch, da y größte Zahl ist!
$\Rightarrow$ 42 ist größte Zahl!
DAS IST FALSCH!!!!
Fehler in der Negation der Behauptung!
Richtig wäre: 42 ist nicht die größte Zahl!

O-Kalkül

Beispiel-Aufgabentypen:

- Zeigen Sie: $f(n) \in O(g(n))$.
- Zeigen Sie: $f(n) \notin O(g(n))$.

Beispiel-Aufgabentypen:

- Zeigen Sie: $f(n) \in O(g(n))$.
- Zeigen Sie: $f(n) \notin O(g(n))$.

In jedem Fall Definition des O-Kalküls lernen!

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n))$$

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ seien zwei Funktionen.

a) Zeigen oder widerlegen Sie:

$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:

$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

- $f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \neg(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n))$

a) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

- $f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \neg(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n))$
- $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall c > 0 : \exists n \geq n_0 : f(n) > cg(n)$

a) Zeigen oder widerlegen Sie:
$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

- $f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow \neg(\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \exists c > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n))$
- $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall c > 0 : \exists n \geq n_0 : f(n) > cg(n)$
- Wähle $n_0 = 0$ und $c = 1$: $\exists n > 0 : f(n) > g(n)$, also ist die Aussage korrekt.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

- Sei $f(n) = 2(n+1)$ und $g(n) = n+1$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

- Sei $f(n) = 2(n+1)$ und $g(n) = n+1$.
- Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \leq 2g(n)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
$\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n))$.

- Sei $f(n) = 2(n+1)$ und $g(n) = n+1$.
- Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \leq 2g(n)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$.
- Es gilt also $f(n) \in O(g(n))$, obwohl $\exists n \in \mathbb{N}_0 : f(n) > g(n)$ gilt. Die Aussage ist somit widerlegt.

Die Turingmaschine T mit Bandalphabet $\{0, 1, \Box\}^*$ und Anfangszustand r sei gegeben durch folgende Tabelle:

	r	r_0	r_1	d	l
0	$(r_0, 0, 1)$	$(r_0, 0, 1)$	$(r_1, 0, 1)$	$(d, 1, -1)$	$(l, 0, -1)$
1	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(l, 0, -1)$	$(l, 1, -1)$
$\Box$	-	-	$(d, \Box, -1)$	-	$(r, \Box, 1)$

Was passiert z.B. bei Eingabe $w = 10$?

Die Turingmaschine T mit Bandalphabet $\{0, 1, \square\}^*$ und Anfangszustand r sei gegeben durch folgende Tabelle:

	r	r_0	r_1	d	l
0	$(r_0, 0, 1)$	$(r_0, 0, 1)$	$(r_1, 0, 1)$	$(d, 1, -1)$	$(l, 0, -1)$
1	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(l, 0, -1)$	$(l, 1, -1)$
$\square$	-	-	$(d, \square, -1)$	-	$(r, \square, 1)$

Was passiert z.B. bei Eingabe $w = 10$?

$(r)10 \Rightarrow 1(r_1)0 \Rightarrow 10(r_1)\square \Rightarrow 1(d)0 \Rightarrow (d)11 \Rightarrow (l)\square 01 \Rightarrow$
$(r)01 \Rightarrow 0(r_0)1 \Rightarrow 01(r_1)\square \Rightarrow 0(d)1 \Rightarrow (l)00 \Rightarrow (l)\square 00 \Rightarrow$
$(r)00 \Rightarrow 0(r_0)0 \Rightarrow 00(r_0)\square$

Die Turingmaschine T mit Bandalphabet $\{0, 1, \square\}^*$ und Anfangszustand r sei gegeben durch folgende Tabelle:

	r	r_0	r_1	d	l
0	$(r_0, 0, 1)$	$(r_0, 0, 1)$	$(r_1, 0, 1)$	$(d, 1, -1)$	$(l, 0, -1)$
1	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(l, 0, -1)$	$(l, 1, -1)$
$\square$	-	-	$(d, \square, -1)$	-	$(r, \square, 1)$

Schätzen Sie ab, wie viele Schritte T bei Eingabe des Wortes $w \in \{0, 1\}^+$ macht. Vernachlässigen Sie konstante Faktoren.

Die Turingmaschine T mit Bandalphabet $\{0, 1, \square\}^*$ und Anfangszustand r sei gegeben durch folgende Tabelle:

	r	r_0	r_1	d	l
0	$(r_0, 0, 1)$	$(r_0, 0, 1)$	$(r_1, 0, 1)$	$(d, 1, -1)$	$(l, 0, -1)$
1	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(r_1, 1, 1)$	$(l, 0, -1)$	$(l, 1, -1)$
$\square$	-	-	$(d, \square, -1)$	-	$(r, \square, 1)$

Schätzen Sie ab, wie viele Schritte T bei Eingabe des Wortes $w \in \{0, 1\}^+$ macht. Vernachlässigen Sie konstante Faktoren.

- w wird $Num_2(w)$ mal um 1 verringert. Jedes Verringern braucht dabei etwa $2|w|$ Schritte.
- T macht also abgeschätzt $|w| \cdot Num_2(w)$ Schritte.

Gegeben ist die formale Sprache $L_1 = \{a^n b a^m | n \leq m \leq 2n\}$ und $L_2 = \{a^n b a^m | n < m < 2n\}$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, die L_1 erzeugt.
2. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, die L_2 erzeugt.
3. Geben Sie für ihr G_1 eine Ableitung für das Wort *aaabaaaa* an.
4. Geben Sie für ihr G_2 einen Ableitungsbaum für das Wort *aaabaaaa* an.

Gegeben ist die formale Sprache $L_1 = \{a^n b a^m | n \leq m \leq 2n\}$ und $L_2 = \{a^n b a^m | n < m < 2n\}$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, die L_1 erzeugt.
   - $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \Rightarrow aSa | aSaa | b\})$

Gegeben ist die formale Sprache $L_1 = \{a^n ba^m | n \leq m \leq 2n\}$ und $L_2 = \{a^n ba^m | n < m < 2n\}$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, die L_1 erzeugt.
2. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, die L_2 erzeugt.

Gegeben ist die formale Sprache $L_1 = \{a^n ba^m | n \leq m \leq 2n\}$ und $L_2 = \{a^n ba^m | n < m < 2n\}$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, die L_1 erzeugt.
2. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, die L_2 erzeugt.
   - $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S,$
     $\{S \Rightarrow aXa, X \Rightarrow aYaa, Y \Rightarrow aYa | aYaa | b\})$

Gegeben ist die formale Sprache $L_1 = \{a^n ba^m | n \leq m \leq 2n\}$ und $L_2 = \{a^n ba^m | n < m < 2n\}$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, die L_1 erzeugt.
2. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, die L_2 erzeugt.
   - $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, S,$
     $\{S \Rightarrow aXa, X \Rightarrow aYaa, Y \Rightarrow aYa|aYaa|b\})$
     oder etwas kürzer:
     $\{S \Rightarrow aaYaaa, Y \Rightarrow aYa|aYaa|b\})$

Themen für die Klausur:
in den letzten Jahren

- 8mal: Formale Sprachen
- 6mal: Turing-Maschine, Endl Automaten
- 5mal: Reguläre Ausdrücke, (kontextfreie) Grammatik, Vollständige Induktion, Graphen
- 4mal: Halbordnung, Relationen
- 3mal: Abbildungen, Huffman-Code
- 1mal: O-Kalkül, Aussagelogik, Speicher
- $\Rightarrow$ ziemlich alles außer "Dokumente"

Schönes Wochenende!
Viel Erfolg bei der Klausur!