

# Grundbegriffe der Informatik

## Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

# Endliche Automaten

## Zwei Arten

Mealy: Ausgabe abhängig von

- ausgehendem Zustand
- Eingabe

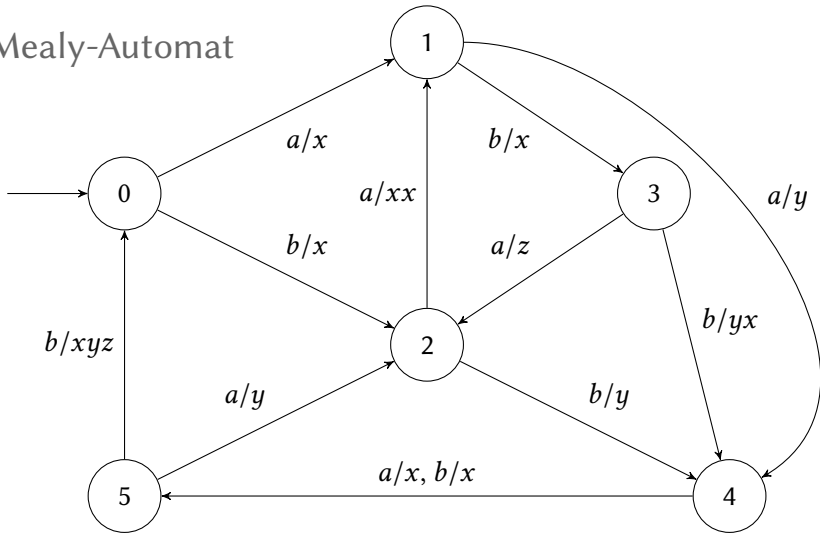
$$g: Z \times X \rightarrow Y^*$$

Moore: Ausgabe abhängig von

- erreichtem Zustand

$$h: Z \rightarrow Y^*$$

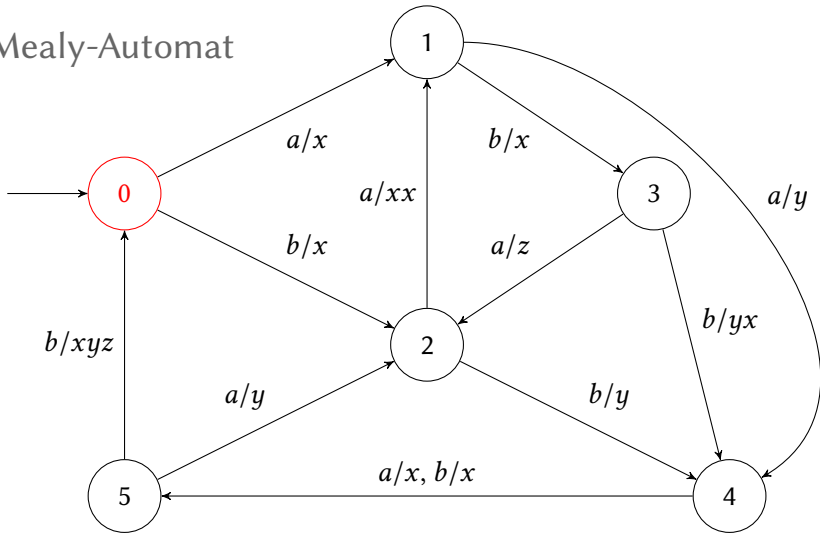
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe:

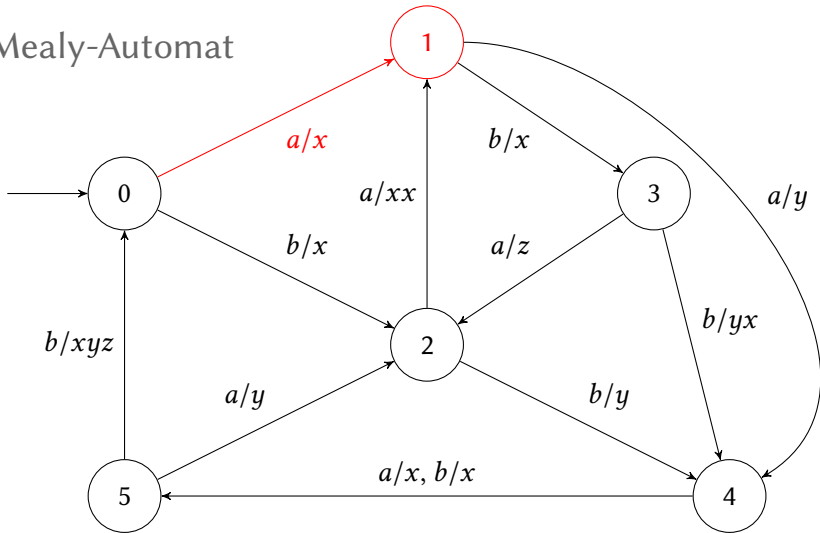
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe:

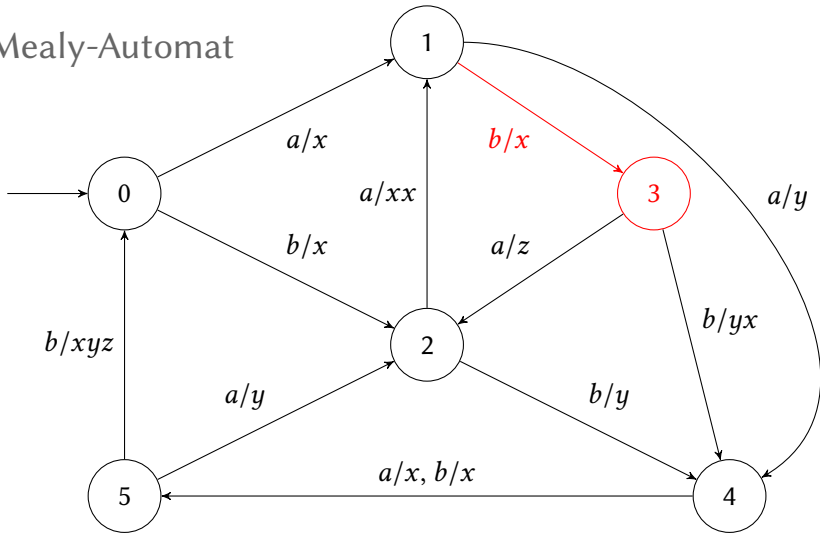
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe: *x*

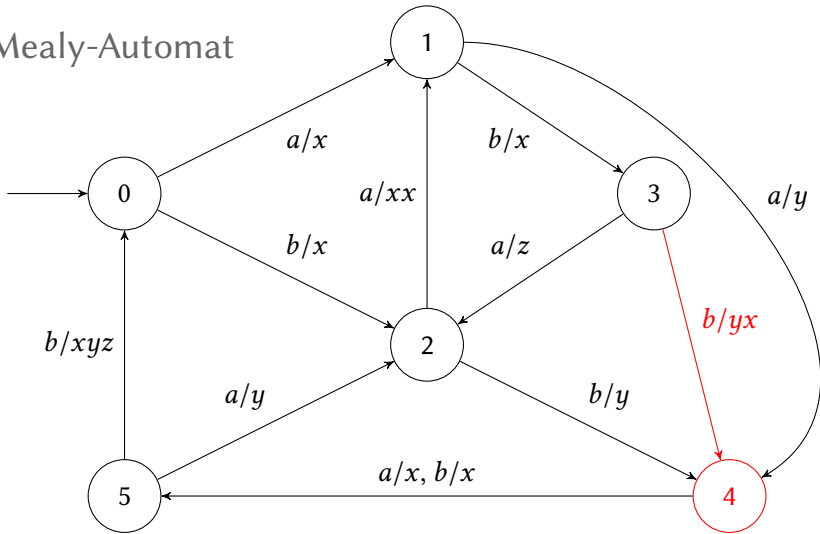
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe: *xx*

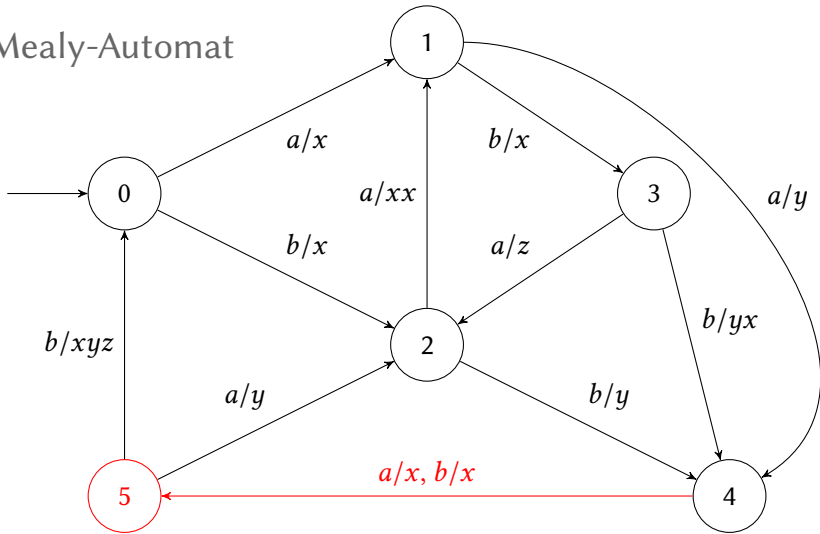
# Mealy-Automat



Eingabe:  $ab**b**ab$

Ausgabe:  $xx**y**x$

# Mealy-Automat

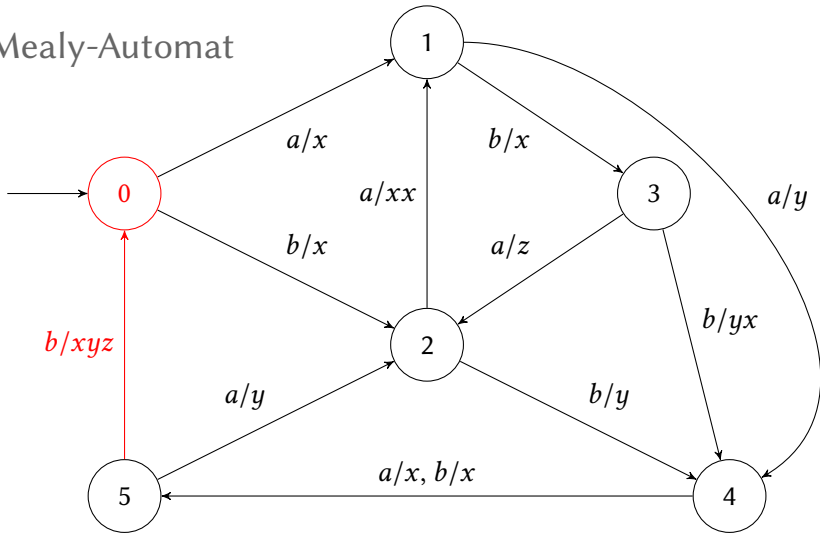


Eingabe: *abbab*

Ausgabe: *xxyx~~x~~*



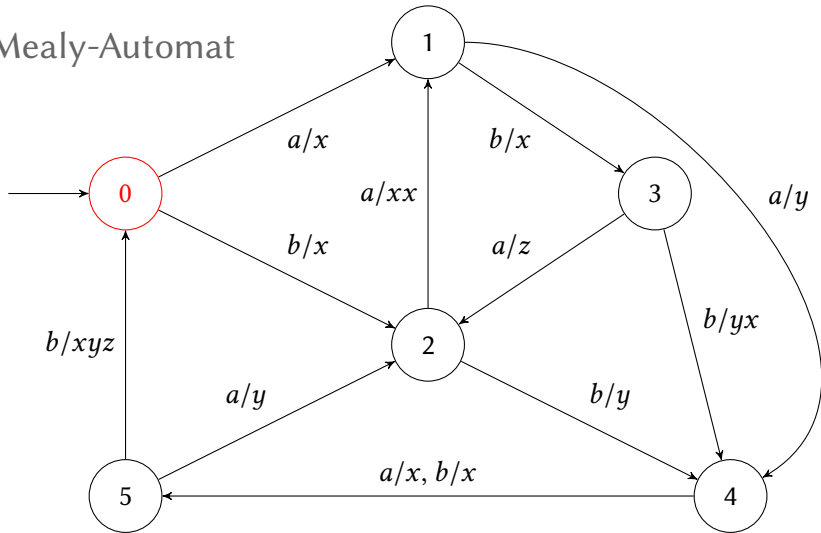
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe: *xyyxxxyz*

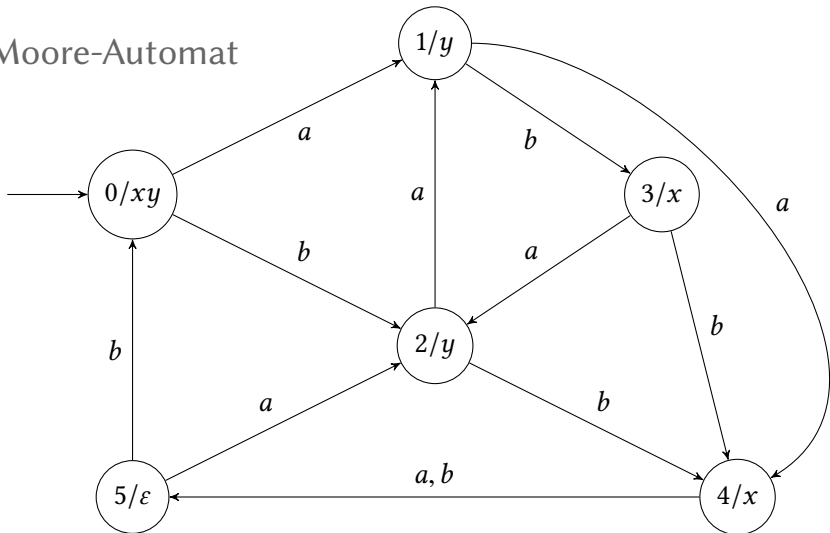
# Mealy-Automat



Eingabe: *abbab*

Ausgabe: *xyxxyz*

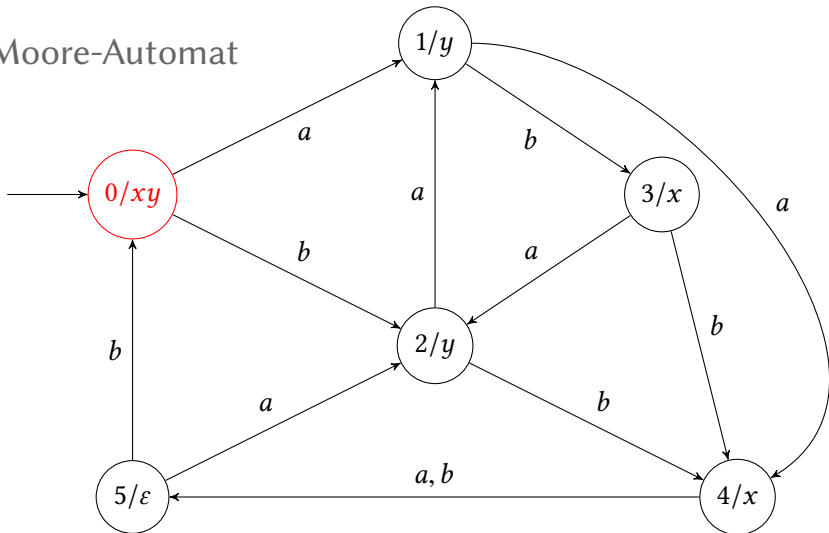
# Moore-Automat



Eingabe: *aabab*

Ausgabe:

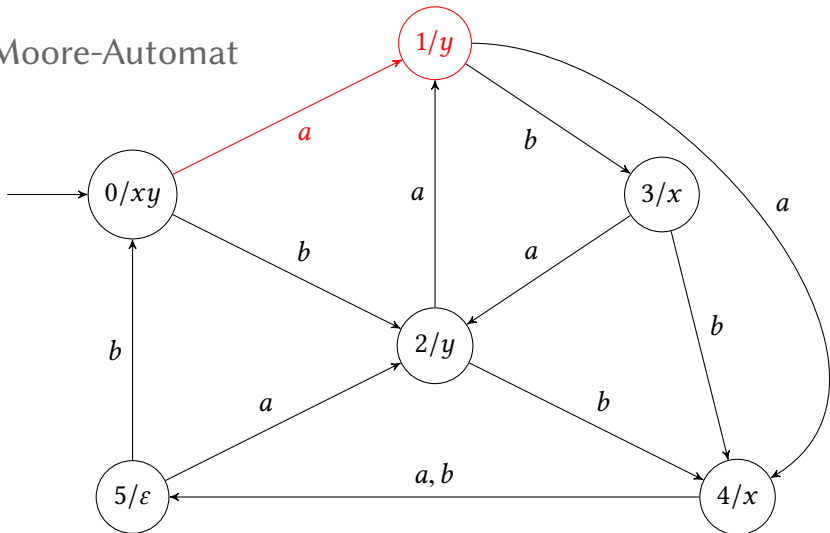
# Moore-Automat



Eingabe: *aabab*

Ausgabe: *xy*

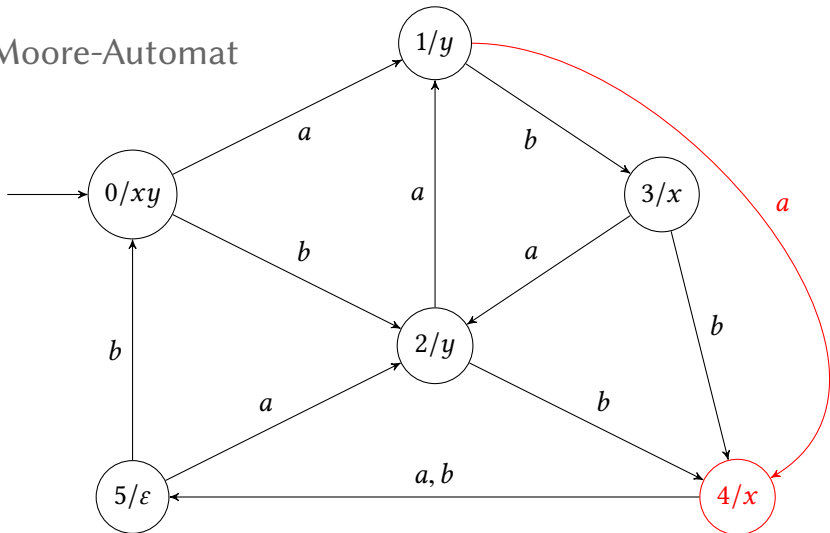
# Moore-Automat



Eingabe: *aabab*

Ausgabe: *xyy*

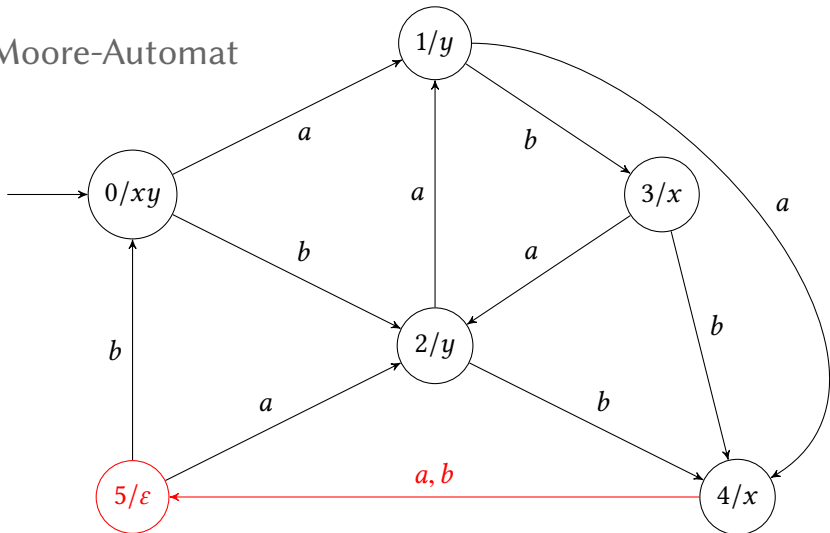
# Moore-Automat



Eingabe:  $abab$

Ausgabe:  $xyyx$

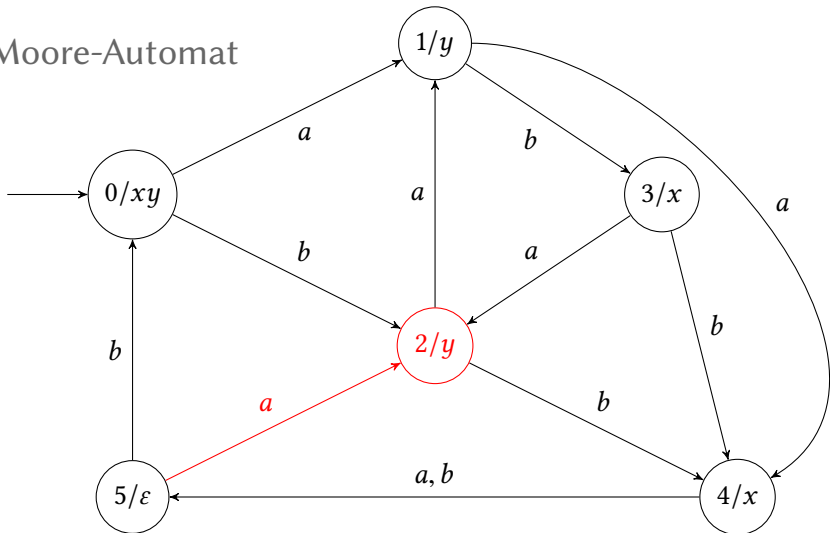
# Moore-Automat



Eingabe:  $aa**b**ab$

Ausgabe:  $xy**y**yx$

# Moore-Automat

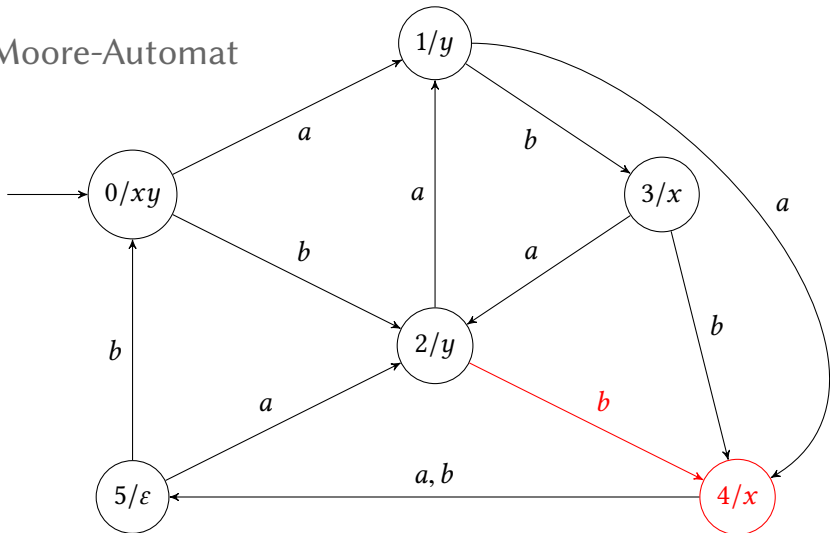


Eingabe: *aabab*

Ausgabe: *xyyxy*



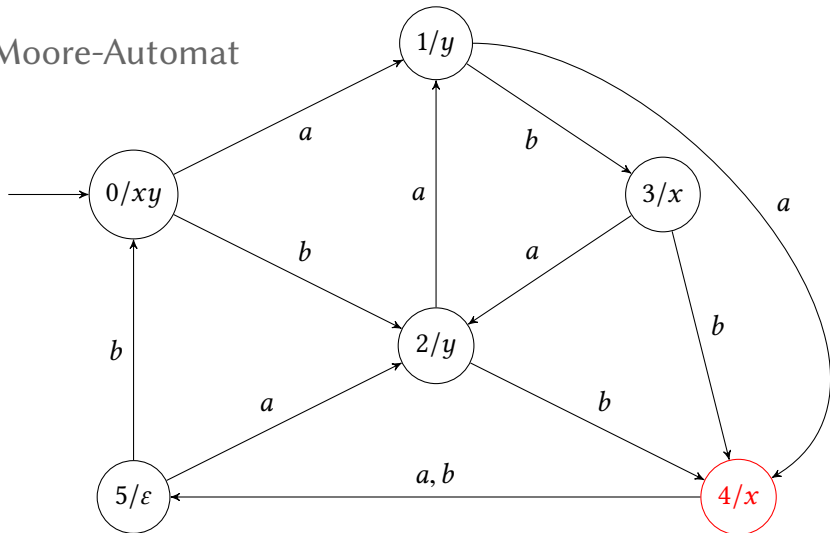
# Moore-Automat



Eingabe: *aabab*

Ausgabe: *xyyxyx*

# Moore-Automat



Eingabe: *aabab*

Ausgabe: *xyyxyx*

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von  $abb$  in Eingabe ersetzen durch  $xxx$  in Ausgabe

Beispiel:

Merkzettel:

Ausgabe:

Verwendete Zustände:

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababbc*

Merkzettel:

Ausgabe:

Verwendete Zustände:

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababbc*

Merkzettel:

Ausgabe: *c*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababbc*

Merkzettel:

Ausgabe: *cb*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cb**b**aababbc*

Merkzettel:

Ausgabe: *cb**b***

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababbc*

Merkzettel: *a*

Ausgabe: *cbb*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt



# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbba**ab**bbc*

Merkzettel: *a*

Ausgabe: *cbba*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbba**ab**bbc*

Merkzettel: *ab*

Ausgabe: *cbba*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt
- *AB* – *ab* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbba**ab**bbc*

Merkzettel: *a*

Ausgabe: *cbba**ab***

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt
- *AB* – *ab* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababb**c*

Merkzettel: *ab*

Ausgabe: *cbbaab*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt
- *AB* – *ab* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababb**c*

Merkzettel: *abb*

Ausgabe: *cbbaabxxx**c*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt
- *AB* – *ab* gemerkt
- *ABB* – *abb* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

Vorkommen von *abb* in Eingabe ersetzen durch *xxx* in Ausgabe

Beispiel: *cbbaababb**c*

Merkzettel:

Ausgabe: *cbbaabxxx**c*

Verwendete Zustände:

- *S* – Startzustand
- *A* – *a* gemerkt
- *AB* – *ab* gemerkt
- *ABB* – *abb* gemerkt

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

## Zustandsüberföhrungsfunktion

| $f$ | $S$ | $A$  | $AB$  | $ABB$ |
|-----|-----|------|-------|-------|
| $a$ | $A$ | $A$  | $A$   | $A$   |
| $b$ | $S$ | $AB$ | $ABB$ | $S$   |
| $c$ | $S$ | $S$  | $S$   | $S$   |

## Ausgabefunktion

| $g$ | $S$           | $A$           | $AB$  | $ABB$         |
|-----|---------------|---------------|-------|---------------|
| $a$ | $\varepsilon$ | $a$           | $ab$  | $\varepsilon$ |
| $b$ | $b$           | $\varepsilon$ | $xxx$ | $b$           |
| $c$ | $c$           | $ac$          | $abc$ | $c$           |

Beobachtung: Spalten von  $S$  und  $ABB$  identisch

# Textersetzung mit Mealy-Automaten

## Zustandsüberföhrungsfunktion

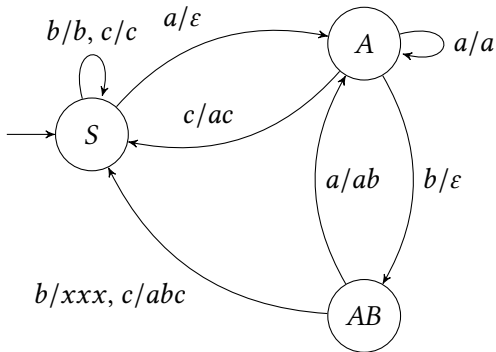
| $f$ | $S$ | $A$  | $AB$ |
|-----|-----|------|------|
| $a$ | $A$ | $A$  | $A$  |
| $b$ | $S$ | $AB$ | $S$  |
| $c$ | $S$ | $S$  | $S$  |

## Ausgabefunktion

| $g$ | $S$           | $A$           | $AB$  |
|-----|---------------|---------------|-------|
| $a$ | $\varepsilon$ | $a$           | $ab$  |
| $b$ | $b$           | $\varepsilon$ | $xxx$ |
| $c$ | $c$           | $ac$          | $abc$ |



# Textersetzung mit Mealy-Automaten



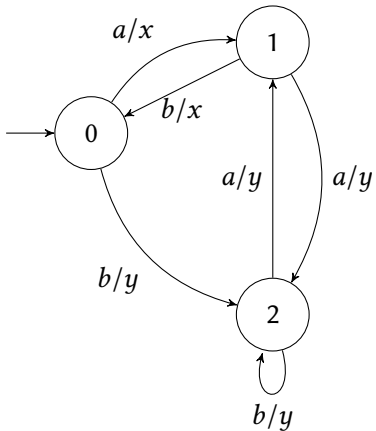
Eingabe: *abbcab*

Ausgabe: *xxxxc*

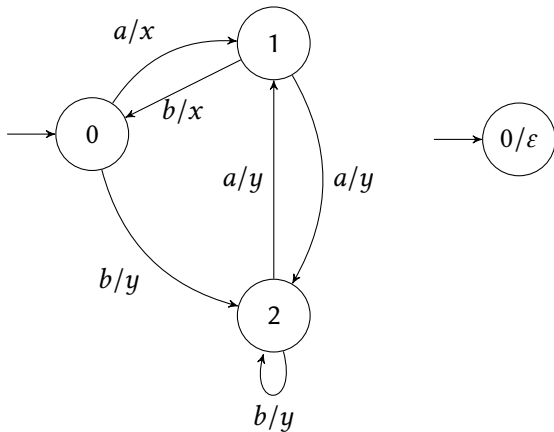
Problem: Automat erkennt Ende der Eingabe nicht!

Abhilfe in der Praxis: End-Of-Input-Zeichen

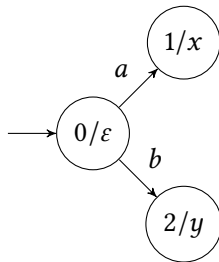
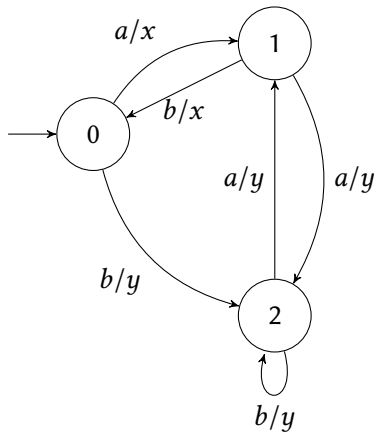
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



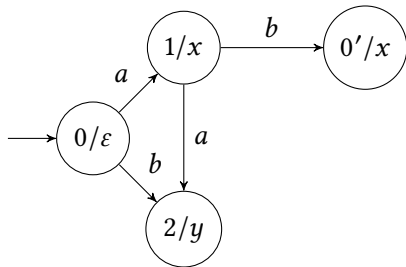
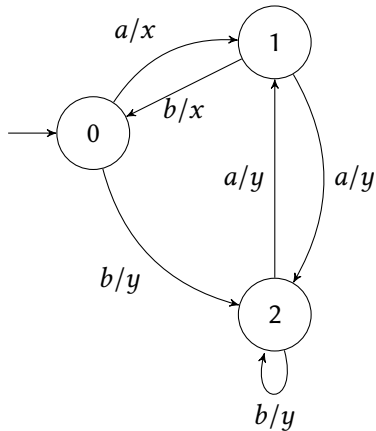
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



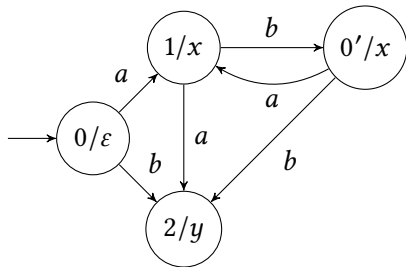
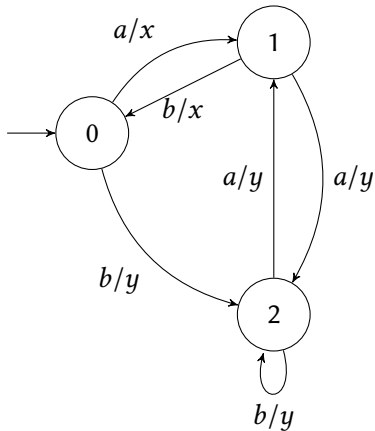
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



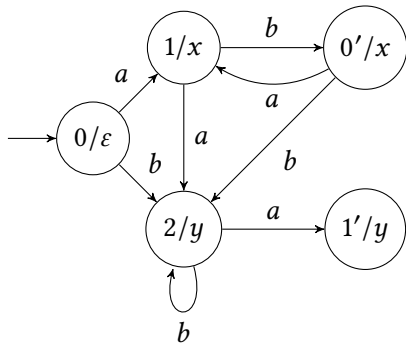
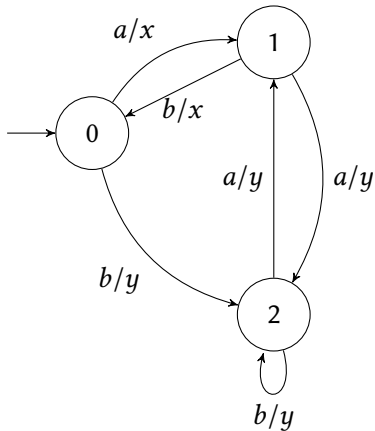
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



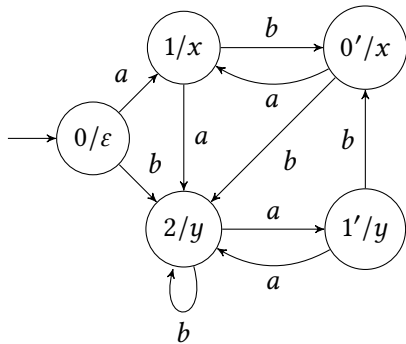
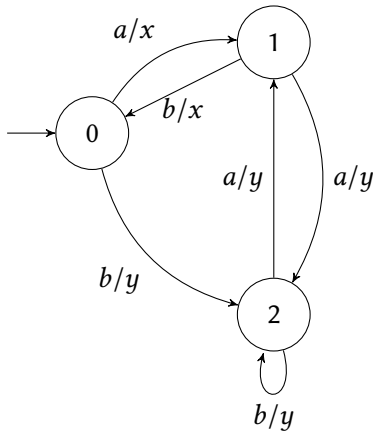
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat



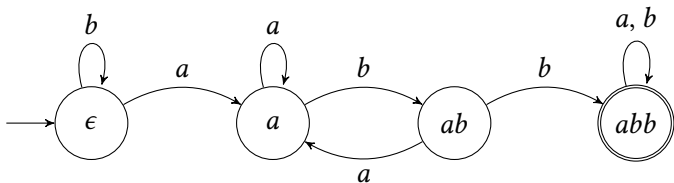
# Umwandlung von Mealy- in Moore-Automat





# Textsuche mit endlichen Akzeptoren

Akzeptiere genau jene Wörter über  $\{a, b\}$  in denen  $abb$  vorkommt

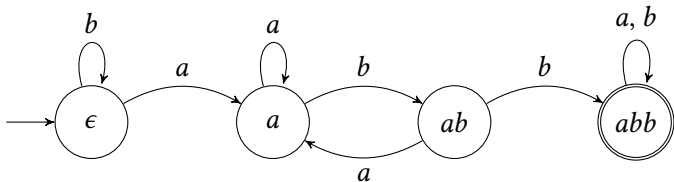


Beobachtungen:

- Ein Zustand je Präfix von  $abb$
- Startzustand –  $\epsilon$
- Akzeptierender Zustand –  $abb$
- $f(abb, x) = abb$

# Textsuche mit endlichen Akzeptoren

Akzeptiere genau jene Wörter über  $\{a, b\}$  in denen  $abb$  vorkommt



Beobachtungen:

- $f(p, x) =$  längstes Suffix von  $px$ , das Präfix von  $abb$  ist, wobei Präfix  $p \neq abb$ 
  - $bbbababb \rightsquigarrow bbbababb$
  - Gelesen  $bbbab$ , aktueller Zustand  $ab$ , nächstes Symbol  $a$
  - Nächster Zustand  $a$ , nächstes Symbol  $b$
  - "Aktuelle linke Grenze in Eingabe die Beginn von  $abb$  sein könnte zur nächst möglichen Grenze schieben"

# Textsuche mit endlichen Akzeptoren

$X$  Alphabet

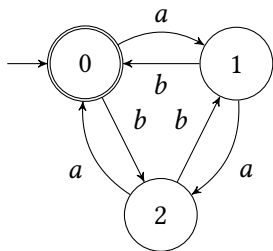
$w$  Wort über  $X$

Akzeptiere genau jene Wörter über  $X$  in denen  $w$  vorkommt

$A = (Z, z_0, X, f, F)$  mit

- $Z = \{p \in X^* \mid p \text{ ist Präfix von } w\}$
- $z_0 = \varepsilon$
- $F = \{w\}$
- $f: Z \times X \rightarrow Z,$   
 $(p, x) \mapsto$   
 $\begin{cases} p, & \text{falls } p = w, \\ \text{längstes Suffix von } px, \text{ das Präfix von } w \text{ ist,} & \text{sonst.} \end{cases}$

# Von Akzeptor erkannte Sprache



0 ist Anfangszustand und einziger akzeptierender Zustand

$L^*$ , wobei  $L \sim \{(0, v_1, \dots, v_n, 0) \mid v_i \neq 0\}$

Fall  $v_1 = 1$ : Erst mit  $a$  von 0 nach 1

Dann mit  $ab$  beliebig oft nach 2 und zurück

Schließlich mit  $b$  oder  $aa$  nach 0

Fall  $v_1 = 2$ : Erst mit  $b$  von 0 nach 2

Dann mit  $ba$  beliebig oft nach 1 und zurück

Schließlich mit  $a$  oder  $bb$  nach

$$\left( \left( \{a\} \cdot \{ab\}^* \cdot (\{b\} \cup \{aa\}) \right) \cup \left( \{b\} \cdot \{ba\}^* \cdot (\{a\} \cup \{bb\}) \right) \right)^*$$