Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Limes Superior

$X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_+\}$
$h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Definition $\limsup\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in X}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in X}} \sup\limits_{\substack{a\geq x \\ a\in X}} h(a)$

Vorstellung Größter Wert dem sich die Abbildung im Unendlichen annähert

Beispiele

- $\limsup\limits_{x\to\infty} \sin(x) = 1$, obwohl $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$
- $\limsup\limits_{x\to\infty} \log_2(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \log_2(x) = \infty$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Landau-Symbol O für Abbildungen f und g aus $\mathbb{R}^X$

Definition $f \in O(g)$ gdw. $c = \limsup\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in X}} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

Vorstellung f asymptotisch durch $c \cdot g$ von oben beschränkt

Charakterisierung $f \in O(g)$ gdw.

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists x_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$$

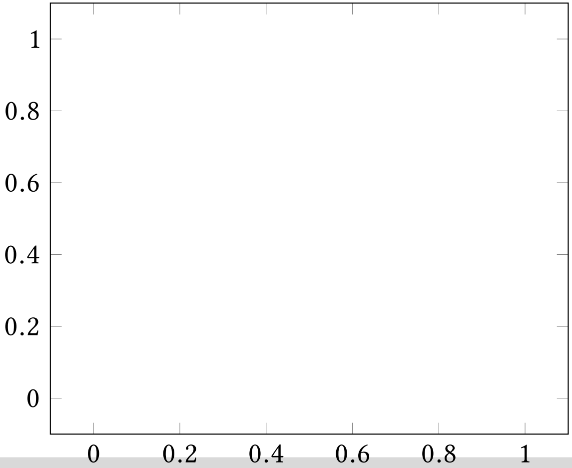
($|f(x)|$ für „hinreichend große“ x
durch $c \cdot |g(x)|$ von oben beschränkt)

Bemerkungen

- Egal ob $c \in \mathbb{R}_+$ oder $c \in \mathbb{R}_0^+$
- Egal ob $x_0 \in \mathbb{N}_+$ oder $\mathbb{N}_0$, solange $x_0 \in X$

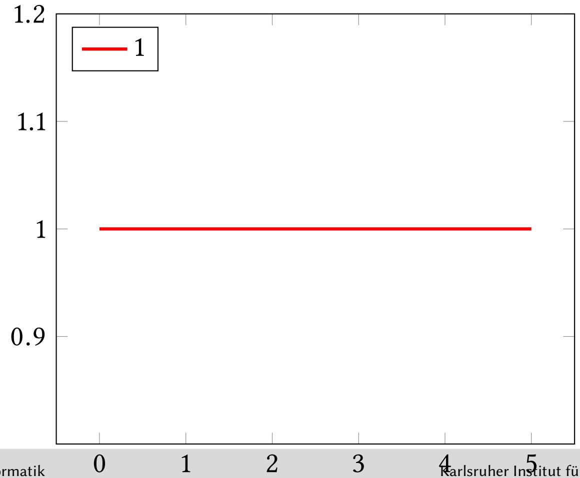
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



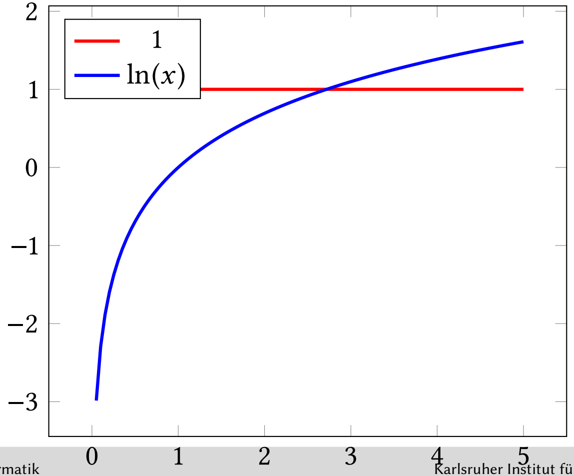
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



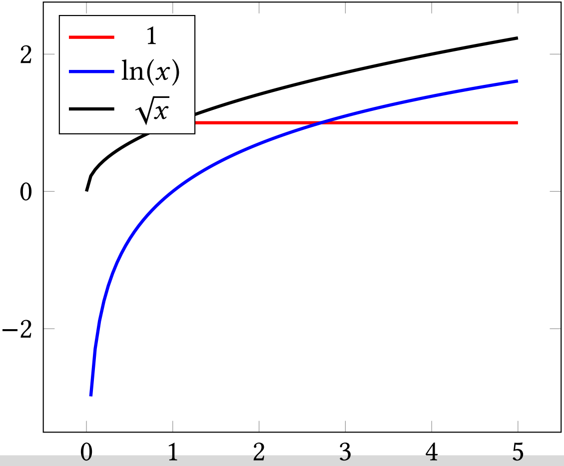
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



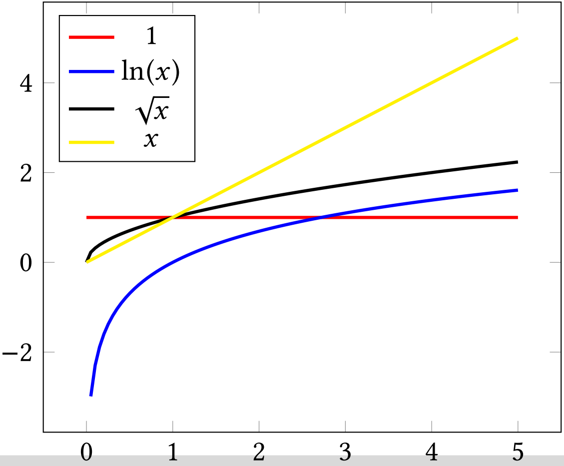
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



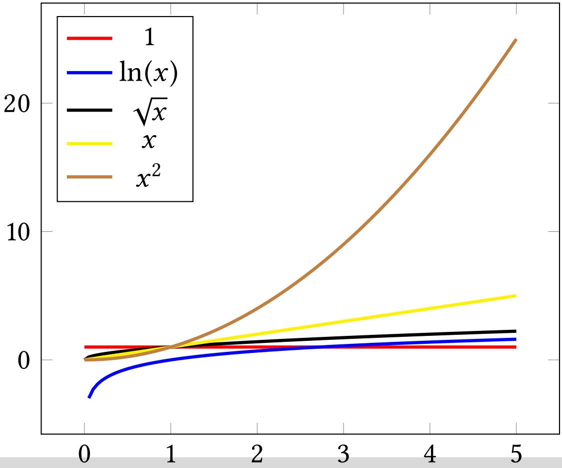
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



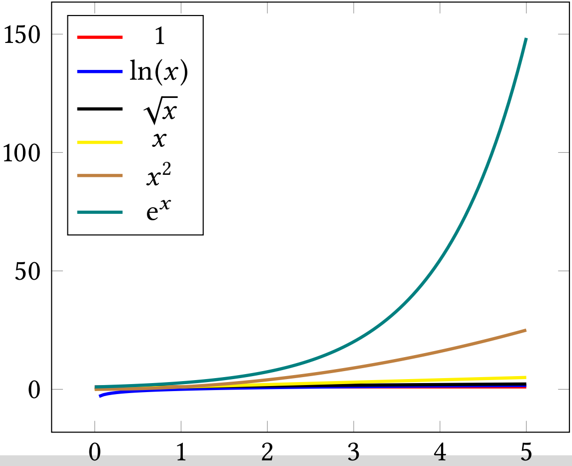
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



$g, h\colon X \to \mathbb{R}$

Satz $O(g) \cdot O(h) \subseteq O(g \cdot h)$

Umformulierung $\forall f_1 \in O(g)\ \forall f_2 \in O(h) : f_1 \cdot f_2 \in O(g \cdot h)$

Beweis

$$f_1 \in O(g) \text{ und } f_2 \in O(h)$$

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+ : \exists x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathbb{N}_+ :$$

$$\forall x \geq x_{0,1} : |f_1(x)| \leq c_1 \cdot |g(x)|$$

$$\forall x \geq x_{0,2} : |f_2(x)| \leq c_2 \cdot |h(x)|$$

$$\forall x \geq \max(x_{0,1}, x_{0,2}) : |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leq c_1 |g(x)| \cdot c_2 |h(x)|$$

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists x_0 \in \mathbb{N}_+ :$$

$$\forall x \geq x_0 : |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leq c \cdot |g(x)| \cdot |h(x)|$$

$g, h\colon X \to \mathbb{R}$

Satz $O(g \cdot h) \subseteq O(g) \cdot O(h)$

Umformulierung $\forall f \in O(g \cdot h)\ \exists f_1 \in O(g)\ \exists f_2 \in O(h) : f = f_1 \cdot f_2$

Beweis

$$f \in O(g \cdot h), \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists x_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \cdot |h(x)|$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < x_0, \\ c \cdot g(x), & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f_1(x)}, & \text{falls } f_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\forall x \geq x_0 : f_1(x) = 0 \to c \cdot g(x) = 0 \to |f(x)| \leq 0 \to f(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x)$$

$$\forall x \geq x_0 : |f_1(x)| \leq c \cdot |g(x)| \land |f_2(x)| \leq |h(x)|$$

$g, h \colon X \to \mathbb{R}$

Satz $O(g \cdot h) \subseteq O(g) \cdot O(h)$

Umformulierung $\forall f \in O(g \cdot h)\ \exists f_1 \in O(g)\ \exists f_2 \in O(h) : f = f_1 \cdot f_2$

Beweis

$$f \in O(g \cdot h), \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists x_0 \in \mathbb{N}_+ : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \cdot |h(x)|$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < x_0, \\ c \cdot g(x), & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f_1(x)}, & \text{falls } f_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu zeigen: $\forall x \geq x_0 : |f_2(x)| \leq |h(x)|$

Fall 1: $f_1(x) = 0$. Dann $|f_2(x)| = 0 \leq |h(x)|$

Fall 2: $f_1(x) \neq 0$. Dann $|f_2(x)| = \frac{|f(x)|}{|f_1(x)|} \leq \frac{c \cdot |g(x)| \cdot |h(x)|}{c \cdot |g(x)|} = |h(x)|$

Landau-Symbol O für Abbildungen f und g aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$

Definition $f \in O(g)$ gdw. $c = \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}_0}} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$

Vorstellung f asymptotisch durch $c \cdot g$ von oben beschränkt

Charakterisierung $f \in O(g)$ gdw.

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$

($|f(n)|$ für „hinreichend große" n
durch $c \cdot |g(n)|$ von oben beschränkt)

Bemerkung Egal ob $c \in \mathbb{R}_+$ oder $c \in \mathbb{R}_0^+$

Beispiel

Behauptung $[n \mapsto \frac{n^3+2n}{2n+1}] \in O(n \mapsto n^2)$

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{n^3 + 2n}{2n + 1} &\leq \frac{n^3 + 2n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + 1 \\ &\leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 \\ &= \frac{3}{2}n^2. \end{aligned}$$

Wähle beispielsweise $c = \frac{3}{2}$ und $n_0 = 42$.

Binomialkoeffizienten

Definition

$$\forall n \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$

Spezialfall

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall k \in \mathbb{Z}_{n+1} : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomialkoeffizienten — Asymptotik

$$f_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{falls } n \geq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung $f_k \in \Theta(n \mapsto n^k) = O(n \mapsto n^k) \cap \Omega(n \mapsto n^k)$

Binomialkoeffizienten — Asymptotik

$$f_k \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{falls } n \geq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung $f_k \in \Theta(n \mapsto n^k) = O(n \mapsto n^k) \cap \Omega(n \mapsto n^k)$

Beweis von $f_k \in O(n \mapsto n^k)$ Für jedes $n \geq k$ gilt

$$f_k(n) = \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} \leq \prod_{j=1}^{k} \frac{n}{1} = n^k$$

Wähle beispielsweise $c = 1$ und $n_0 = k$

Binomialkoeffizienten — Asymptotik

$$f_k \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{falls } n \geq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung $f_k \in \Theta(n \mapsto n^k) = O(n \mapsto n^k) \cap \Omega(n \mapsto n^k)$

Beweis von $f_k \in \Omega(n \mapsto n^k)$

$$n \geq 2k$$

$$n + 1 - k \geq n + 1 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{n}{2}$$

$$f_k(n) = \binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} \geq \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-k}{k}$$

$$= \frac{1}{k^k}(n+1-k)^k \geq \frac{1}{k^k}\left(\frac{n}{2}\right)^k = \frac{1}{(2k)^k} n^k$$

Wähle beispielsweise $c = \frac{1}{(2k)^k}$ und $n_0 = 2k$