Grundbegriffe der Informatik

Übung

S. Wacker/T. Worsch

Karlsruher Institut für Technologie

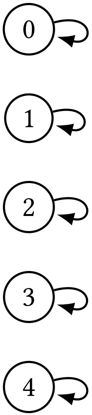
Wintersemester 2015/2016

Welcher Graph hat die Einheitsmatrix als Adjazenzmatrix?

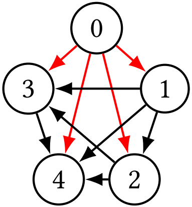
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

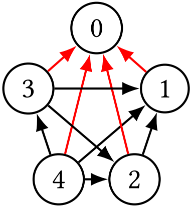
Welcher Graph hat die Einheitsmatrix als Adjazenzmatrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



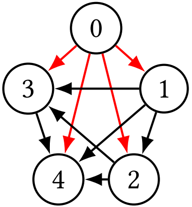
Wie verändert sich die Adjazenzmatrix, wenn man alle Pfeilrichtungen umkehrt?



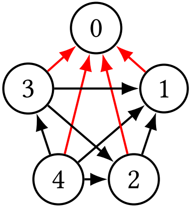


$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Wie verändert sich die Adjazenzmatrix, wenn man alle Pfeilrichtingen umkehrt? Spiegelung an Hauptdiagonale



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie verändert sich die Adjazenzmatrix, wenn man alle Pfeilrichtungen umkehrt?

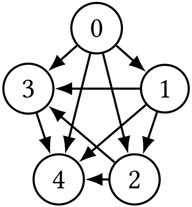
$G = (V, E)$ vor und $G' = (V, E')$ nach Umkehrung der Pfeile

A, A' Adjazenzmatrizen von G bzw. G'

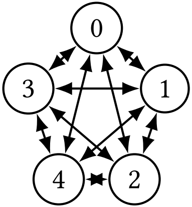
$$\begin{aligned} A'_{i,j} = 1 &\text{ gdw. } (i,j) \in E' \\ &\text{ gdw. } (j,i) \in E \\ &\text{ gdw. } A_{j,i} = 1 \end{aligned}$$

$A' = A^t$ ... Spiegeln an Hauptdiagonale!

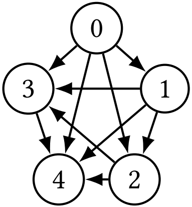
Wie ändert sich die Adjazenzmatrix, wenn für jede gerichtete Kante die entgegengesetzte hinzukommt?



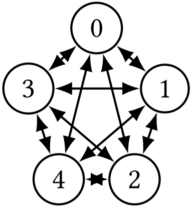
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Wie ändert sich die Adjazenzmatrix, wenn für jede gerichtete Kante die entgegengesetzte hinzukommt?



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie ändert sich die Adjazenzmatrix, wenn für jede gerichtete Kante die entgegengesetzte hinzukommt?

$G = (V, E)$ vor und $G' = (V, E')$ nach Aktion

A, A' Adjazenzmatrizen von G bzw. G'

$$\begin{aligned} A'_{i,j} = 1 &\text{ gdw. } (i, j) \in E' \\ &\text{ gdw. } (i, j) \in E \vee (j, i) \in E \\ &\text{ gdw. } A_{i,j} = 1 \vee A_{j,i} = 1 \end{aligned}$$

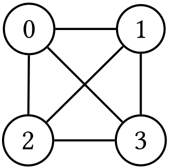
Exkurs: Planare Graphen

Definition

Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn kreuzungsfrei zeichnen *kann*.

Definition

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $K_n = (\mathbb{Z}_n, \{\{x, y\} \in 2^{\mathbb{Z}_n} \mid x \neq y\})$.



K_4

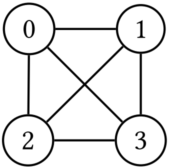
Exkurs: Planare Graphen

Definition

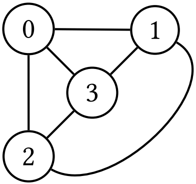
Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn kreuzungsfrei zeichnen *kann*.

Definition

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $K_n = (\mathbb{Z}_n, \{\{x, y\} \in 2^{\mathbb{Z}_n} \mid x \neq y\})$.



K_4



man sieht: K_4 ist planar

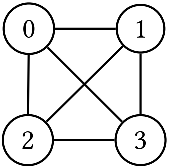
Exkurs: Planare Graphen

Definition

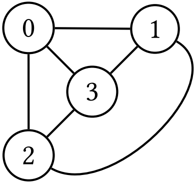
Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn kreuzungsfrei zeichnen *kann*.

Definition

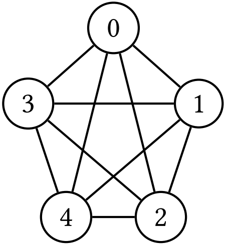
Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $K_n = (\mathbb{Z}_n, \{\{x, y\} \in 2^{\mathbb{Z}_n} \mid x \neq y\})$.



K_4



man sieht: K_4 ist planar



K_5 ist nicht planar

Exkurs: Planare Graphen

Behauptung

K_5 ist nicht planar.

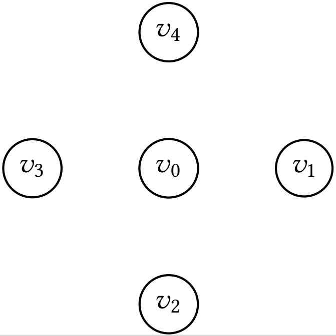
Exkurs: Planare Graphen

Behauptung

K_5 ist nicht planar.

vage „Beweis"-Skizze

Zeichne 5 Knoten



Exkurs: Planare Graphen

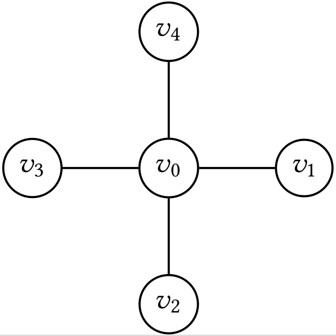
Behauptung

K_5 ist nicht planar.

vage „Beweis"-Skizze

Zeichne 5 Knoten

Verbinde v_0 mit allen anderen Knoten



Exkurs: Planare Graphen

Behauptung

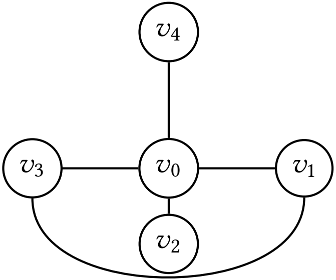
K_5 ist nicht planar.

vage „Beweis“-Skizze

Zeichne 5 Knoten

Verbinde v_0 mit allen anderen Knoten

Verbinde v_1 mit v_3



Exkurs: Planare Graphen

Behauptung

K_5 ist nicht planar.

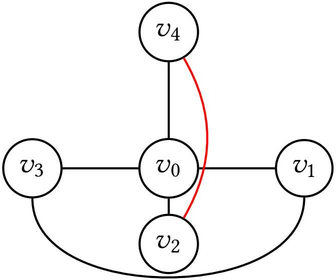
vage „Beweis“-Skizze

Zeichne 5 Knoten

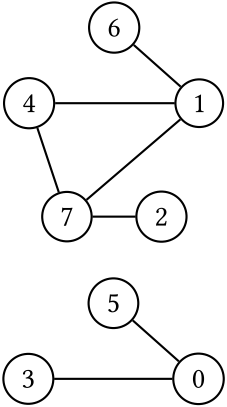
Verbinde v_0 mit allen anderen Knoten

Verbinde v_1 mit v_3

Nun ist keine kreuzungsfreie Kante mehr zwischen v_2 und v_4 möglich

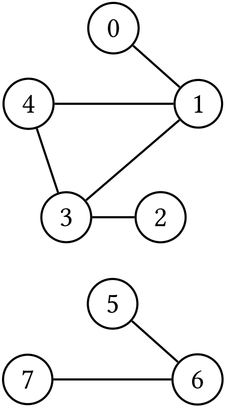


Adjazenzmatrizen der Zusammenhangskomponenten



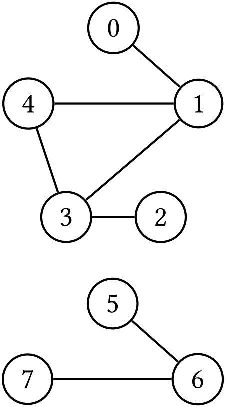
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrizen der Zusammenhangskomponenten bei geschickter Knotennummerierung



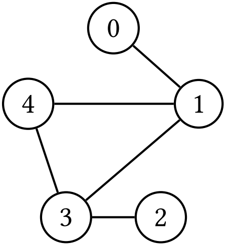
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrizen der Zusammenhangskomponenten bei geschickter Knotennummerierung

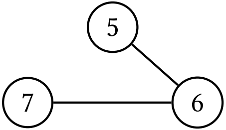


$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Adjazenzmatrizen der Zusammenhangskomponenten bei geschickter Knotennummerierung

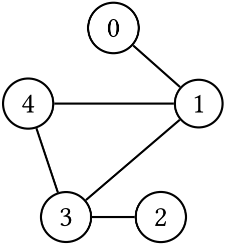


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

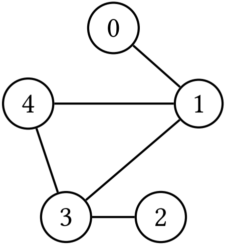


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegematrix eines zusammenhängenden ungerichteten Graphen

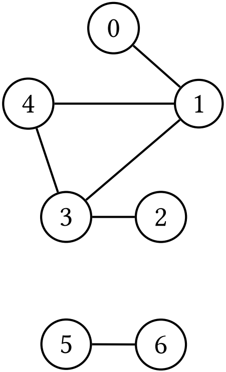


Wegematrix eines zusammenhängenden ungerichteten Graphen

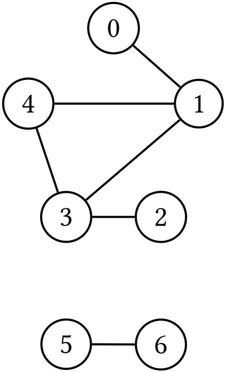


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix eines unzusammenhängenden ungerichteten Graphen, geschickte Nummerierung

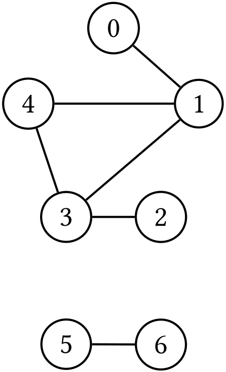


Wegematrix eines unzusammenhängenden ungerichteten Graphen, geschickte Nummerierung



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

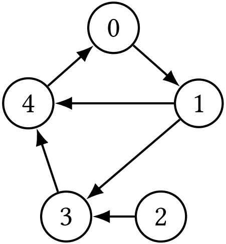
Wegematrix eines unzusammenhängenden ungerichteten Graphen, geschickte Nummerierung



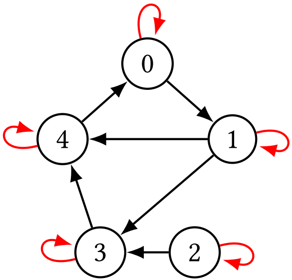
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

geschickt nummeriert: alle Knoten einer Zusammenhangskomponente haben aufeinanderfolgende Nummern

Erreichbarkeitsmatrizen



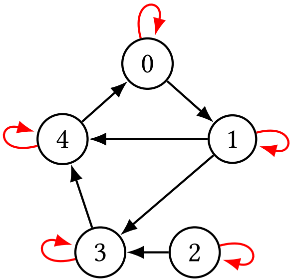
Erreichbarkeitsmatrizen



$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A^0)_{i,j} \neq 0 &\text{ gdw. } i = j \\ &\text{ gdw. } (i,j) \in E^0 \end{aligned}$$

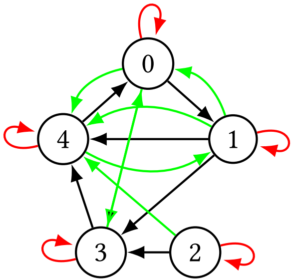
Erreichbarkeitsmatrizen



$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^1)_{i,j} \neq 0 \text{ gdw. } (i,j) \in E^1$$

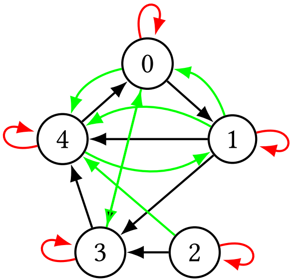
Erreichbarkeitsmatrizen



$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A^2)_{i,j} \neq 0 \text{ gdw. } & \sum_{k \in \mathbb{Z}_5} A_{i,k} A_{k,j} \neq 0 \\
\text{gdw. } & \exists k \in \mathbb{Z}_5 \colon A_{i,k} A_{k,j} \neq 0 \\
\text{gdw. } & \exists k \in \mathbb{Z}_5 \colon A_{i,k} \neq 0 \land A_{k,j} \neq 0 \\
\text{gdw. } & \exists k \in \mathbb{Z}_5 \colon (i,k) \in E \land (k,j) \in E \\
\text{gdw. } & (i,j) \in E^2
\end{aligned}$$

Erreichbarkeitsmatrizen

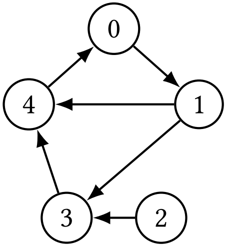


Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(A^n)_{i,j} \neq 0 \text{ gdw. } (i,j) \in E^n$$

Beweis durch vollständige Induktion

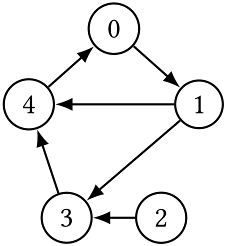
Wegematrix



$$A^0 + A^1 + \cdots + A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Längster wiederholungsfreier Pfad, der kein Zyklus ist, hat Länge 4

Wegematrix



$$A^0 + A^1 + \cdots + A^4$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Längster wiederholungsfreier Pfad, der kein Zyklus ist, hat Länge 4

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alte Klausuraufgabe

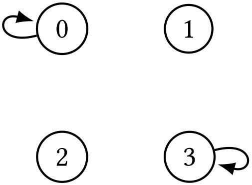
Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{Z}_4, E)$, für deren Adjazenzmatrix A gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alte Klausuraufgabe

Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{Z}_4, E)$, für deren Adjazenzmatrix A gilt:

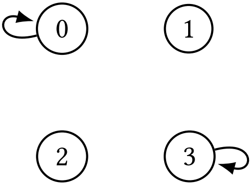
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

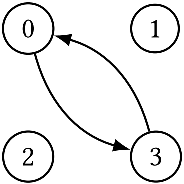


Alte Klausuraufgabe

Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{Z}_4, E)$, für deren Adjazenzmatrix A gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

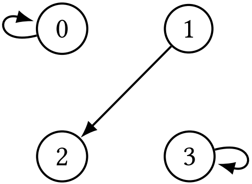


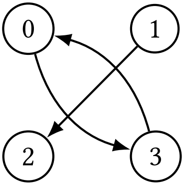


Alte Klausuraufgabe

Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{Z}_4, E)$, für deren Adjazenzmatrix A gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

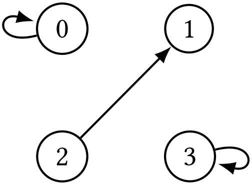


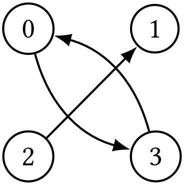


Alte Klausuraufgabe

Zeichnen Sie alle gerichteten Graphen $G = (\mathbb{Z}_4, E)$, für deren Adjazenzmatrix A gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    P_0
  od
od

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } j \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    P_0
  od
od

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    P_0
  od
od

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } j \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} n$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for}\ \ i \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad \textbf{for}\ \ j \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 &= \sum_{i=0}^{n-1} n \\
&= n \cdot n
\end{aligned}
$$

Ausführungen zählen (1)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for}\ \ i \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad \textbf{for}\ \ j \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 1 &= \sum_{i=0}^{n-1} n \\
&= n \cdot n \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

Einschub

Wieviel ist $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$?

Einschub

Wieviel ist $\quad 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 \quad ?$

Idee des kleinen Gauß:
die Hälfte von

Einschub

Wieviel ist $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$?

Idee des kleinen Gauß:
die Hälfte von

$$
\begin{array}{r}
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\
+\ 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0
\end{array}
$$

Einschub

Wieviel ist $\quad 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \quad ?$

Idee des kleinen Gauß:
die Hälfte von

$$\begin{aligned} & \, 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ & + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\ & = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 90 \end{aligned}$$

Einschub

Wieviel ist $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$?

Idee des kleinen Gauß:
die Hälfte von

$$
\begin{array}{r}
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\
+\, 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 \\
= 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 90
\end{array}
$$

also 45

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } \; i \leftarrow 0 \; \textbf{ to } \; n-1 \; \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } \; j \leftarrow 0 \; \textbf{ to } \; i-1 \; \textbf{ do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for } i \leftarrow 0 \textbf{ to } n-1 \textbf{ do} \\
\quad \textbf{for } j \leftarrow 0 \textbf{ to } i-1 \textbf{ do} \\
\qquad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i\right)$$

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $i-1$ **do**
    P_0
  od
od

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i) = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} n-1-i)$$

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $i-1$ **do**
    P_0
  od
od

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i) = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} n-1-i)$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n-1} i + (n-1-i))$$

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for}\ \ i \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad \textbf{for}\ \ j \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ i-1\ \ \textbf{do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} n-1-i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + (n-1-i)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} n-1
\end{aligned}
$$

Ausführungen zählen (2)

Wie oft wird P_0 ausgeführt?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{for}\ \ i \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad \textbf{for}\ \ j \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ i-1\ \ \textbf{do} \\
\quad\quad P_0 \\
\quad \textbf{od} \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} n-1-i\right) \\
= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i + (n-1-i)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} n-1 = \frac{1}{2}n(n-1)
\end{aligned}
$$