Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Pfade

$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ heißt $p = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in V^{n+1}$
Pfad von v_0 nach v_n der Länge n in G gdw.

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n : (v_i, v_{i+1}) \in E$$

Jedes $p = (v) \in V^1$ ist Pfad von v nach v der Länge 0 in G

Wenn

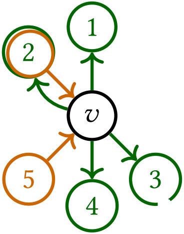
- $p = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ Pfad von v_0 nach v_n der Länge n in G und
- $w \in V$ mit $(v_n, w) \in E$,

dann ist

$$p \cdot w = (v_0, v_1, \ldots, v_n, w)$$

Pfad von v_0 nach w der Länge $n + 1$ in G

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

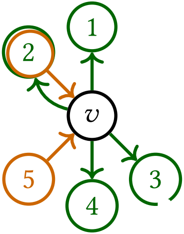
$$E^-(v) = \{(u, v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v, w) \in E\}$$

Ein- und Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}| \quad \text{bzw.}$$
$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

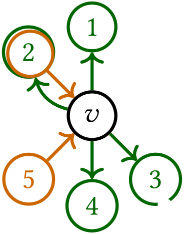
$$E^-(v) = \{(u,v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v,w) \in E\}$$

$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

Behauptung: $\displaystyle\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$

Beweisskizze:

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

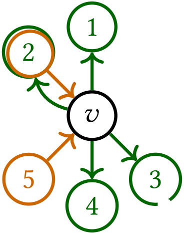
$$E^-(v) = \{(u, v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v, w) \in E\}$$

$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

Behauptung: $\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$

Beweisskizze: Die Mengen $E^-(v)$, $v \in V$, sind paarweise disjunkt.

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

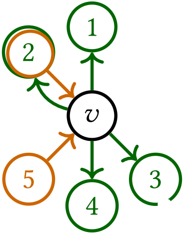
$$E^-(v) = \{(u, v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v, w) \in E\}$$

$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

Behauptung: $\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$

Beweisskizze: Die Mengen $E^-(v)$, $v \in V$, sind paarweise disjunkt. Außerdem gilt $\bigcup_{v \in V} E^-(v) = E$.

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

$$E^-(v) = \{(u, v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v, w) \in E\}$$

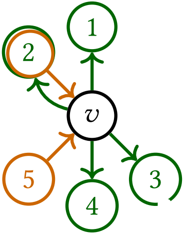
$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

Behauptung: $\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$

Beweisskizze: Die Mengen $E^-(v)$, $v \in V$, sind paarweise disjunkt. Außerdem gilt $\bigcup_{v \in V} E^-(v) = E$. Folglich gilt

$$\sum_{v \in V} |E^-(v)| = |\bigcup_{v \in V} E^-(v)| = |E|.$$

Ein- und Ausgangsgrade



$G = (V, E)$ gerichteter Graph

Ein- und ausgehende Kanten von $v \in V$

$$E^-(v) = \{(u, v) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^+(v) = \{(v, w) \in E\}$$

$d^-(v) = |E^-(v)|$ und $d^+(v) = |E^+(v)|$

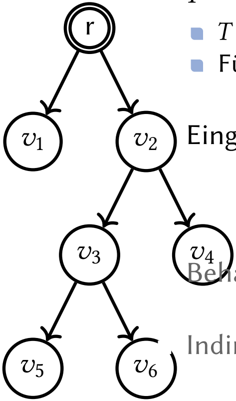
Behauptung: $\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$

Beweisskizze: Die Mengen $E^-(v)$, $v \in V$, sind paarweise disjunkt. Außerdem gilt $\bigcup_{v \in V} E^-(v) = E$. Folglich gilt

$$\sum_{v \in V} |E^-(v)| = |\bigcup_{v \in V} E^-(v)| = |E|.$$

Genauso kann man $|E| = \sum_{v \in V} |E^+(v)|$ zeigen.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

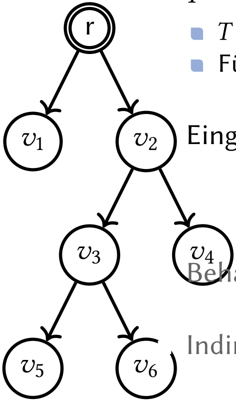
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis:

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

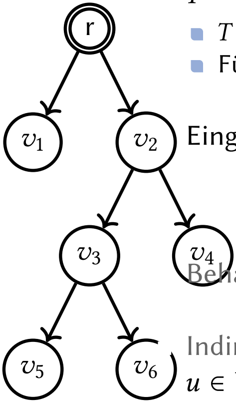
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

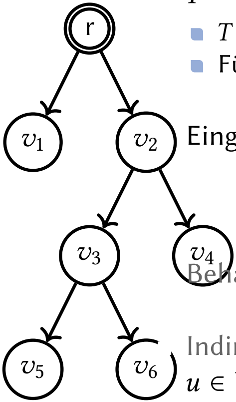
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

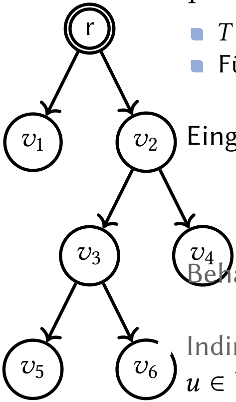
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$. Weiter gibt es einen Pfad p von r nach u.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

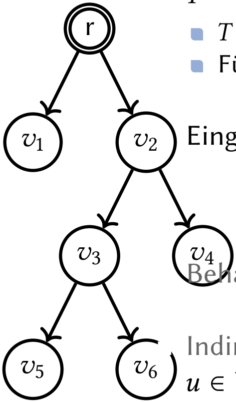
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$. Weiter gibt es einen Pfad p von r nach u. Somit ist $p \cdot r$ ein Pfad von r nach r.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

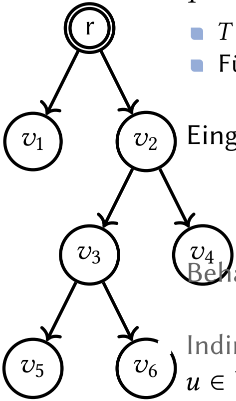
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$. Weiter gibt es einen Pfad p von r nach u. Somit ist $p \cdot r$ ein Pfad von r nach r. Außerdem ist (r) ein Pfad von r nach r.

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

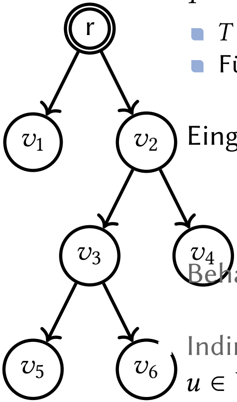
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$. Weiter gibt es einen Pfad p von r nach u. Somit ist $p \cdot r$ ein Pfad von r nach r. Außerdem ist (r) ein Pfad von r nach r. Also gibt es zwei Pfade von r nach r,

Gerichtete Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

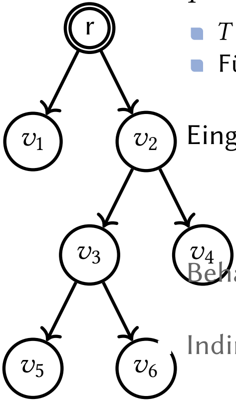
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $d^-(r) = 0$

Indirekter Beweis: Angenommen $d^-(r) \geq 1$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $(u, r) \in E$. Weiter gibt es einen Pfad p von r nach u. Somit ist $p \cdot r$ ein Pfad von r nach r. Außerdem ist (r) ein Pfad von r nach r. Also gibt es zwei Pfade von r nach r, im Widerspruch zur Definition von Bäumen.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

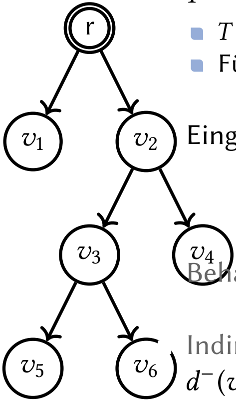
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis:

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

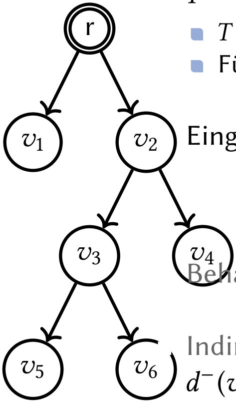
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit $d^-(v) \geq 2$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

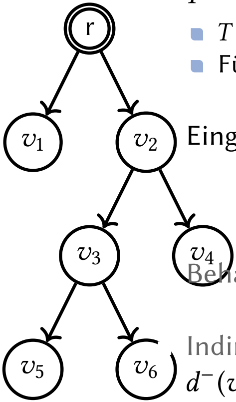
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit $d^-(v) \geq 2$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in V$ mit $u_1 \neq u_2$, $(u_1, v) \in E$ und $(u_2, v) \in E$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

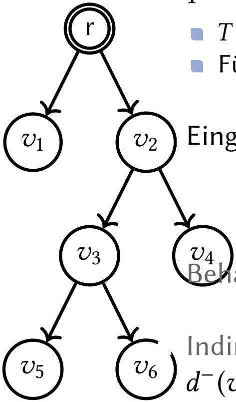
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit $d^-(v) \geq 2$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in V$ mit $u_1 \neq u_2$, $(u_1, v) \in E$ und $(u_2, v) \in E$. Weiter gibt es Pfade p_1 und p_2 von r nach u_1 bzw. u_2.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

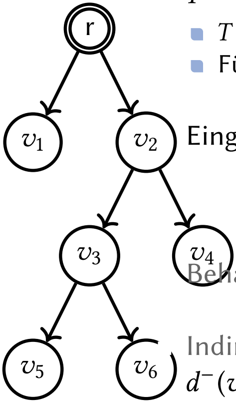
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit $d^-(v) \geq 2$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in V$ mit $u_1 \neq u_2$, $(u_1, v) \in E$ und $(u_2, v) \in E$. Weiter gibt es Pfade p_1 und p_2 von r nach u_1 bzw. u_2. Also gibt es zwei Pfade, nämlich $p_1 \cdot v$ und $p_2 \cdot v$, von r nach v,

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

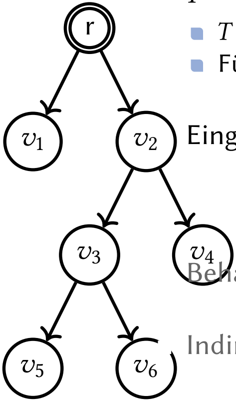
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit $d^-(v) \geq 2$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in V$ mit $u_1 \neq u_2$, $(u_1, v) \in E$ und $(u_2, v) \in E$. Weiter gibt es Pfade p_1 und p_2 von r nach u_1 bzw. u_2. Also gibt es zwei Pfade, nämlich $p_1 \cdot v$ und $p_2 \cdot v$, von r nach v, im Widerspruch zur Definition von Bäumen.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

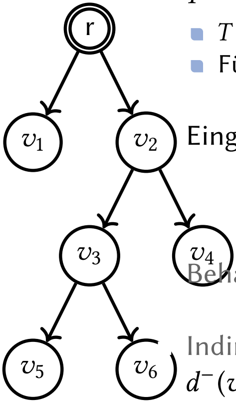
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis:

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

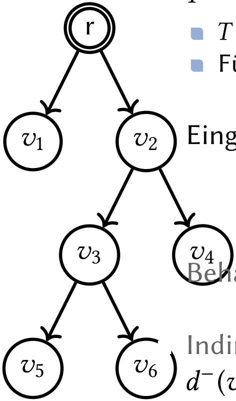
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

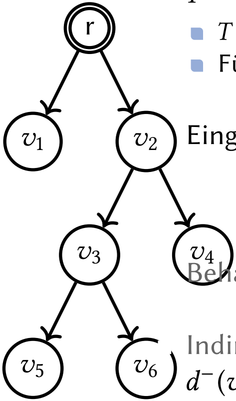
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

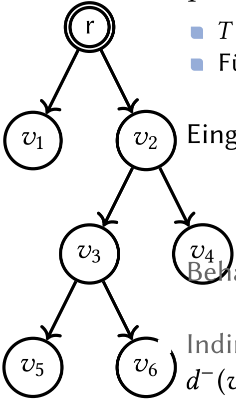
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

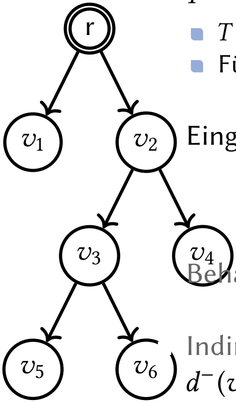
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

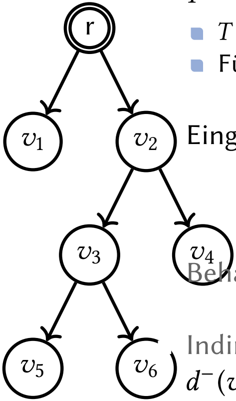
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p. Wegen $v \neq r$, gilt $n \geq 1$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

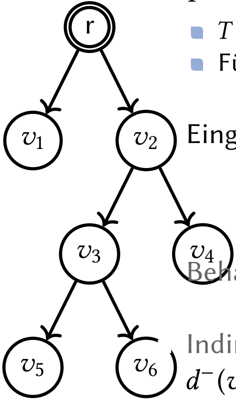
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p. Wegen $v \neq r$, gilt $n \geq 1$. Also ist $p = (\ldots, u, v)$, wobei $u = p_n$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

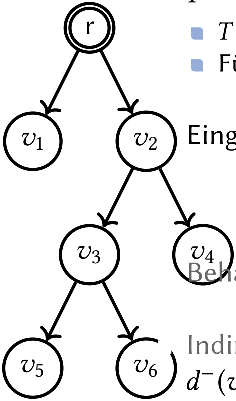
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p. Wegen $v \neq r$, gilt $n \geq 1$. Also ist $p = (\ldots, u, v)$, wobei $u = p_n$. Es gilt $(u, v) \in E$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

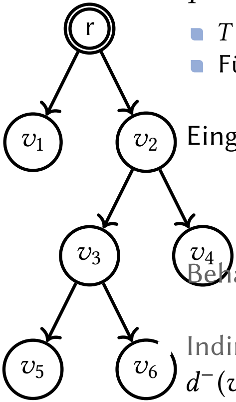
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p. Wegen $v \neq r$, gilt $n \geq 1$. Also ist $p = (\ldots, u, v)$, wobei $u = p_n$. Es gilt $(u, v) \in E$. Damit gilt $d^-(v) \geq 1$,

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

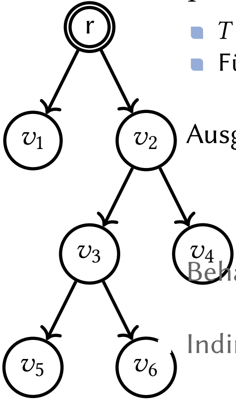
Eingangsgrad von $v \in V$

$$d^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$$

Behauptung: $\forall v \in V \setminus \{r\} : d^-(v) = 1$

Indirekter Beweis: Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus \{r\}$ mit $d^-(v) \neq 1$. Wegen $d^-(v) \leq 1$, gilt $d^-(v) = 0$. Außerdem gibt es einen Pfad p von r nach v. Es sei n die Länge von p. Wegen $v \neq r$, gilt $n \geq 1$. Also ist $p = (\ldots, u, v)$, wobei $u = p_n$. Es gilt $(u, v) \in E$. Damit gilt $d^-(v) \geq 1$, im Widerspruch zu $d^-(v) = 0$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

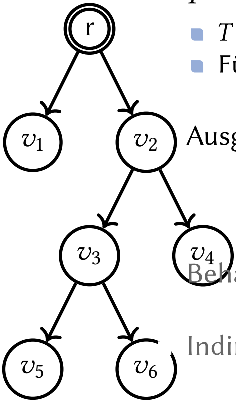
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis:

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

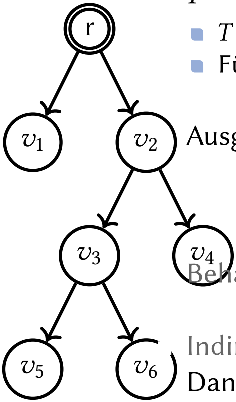
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis: Ang. für jedes $v \in V$ gilt $d^+(v) \geq 1$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

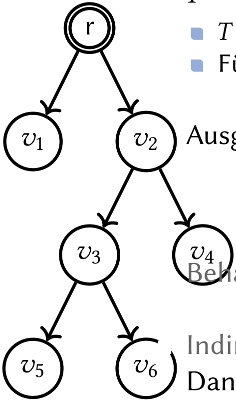
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis: Ang. für jedes $v \in V$ gilt $d^+(v) \geq 1$.
Dann ist $\sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

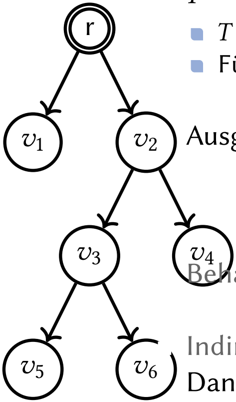
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis: Ang. für jedes $v \in V$ gilt $d^+(v) \geq 1$.
Dann ist $\sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$.
Außerdem ist $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V| - 1$.

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

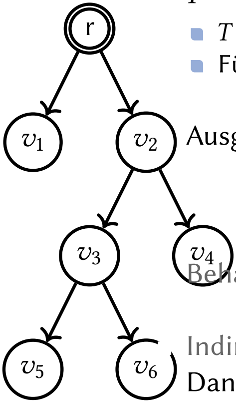
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis: Ang. für jedes $v \in V$ gilt $d^+(v) \geq 1$.
Dann ist $\sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$.
Außerdem ist $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V| - 1$.
Wegen $\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v)$, folgt $|V| - 1 \geq |V|$,

Bäume



$T = (V, E)$ gerichteter Baum mit Wurzel r

- T gerichteter Graph
- Für jedes $v \in V$ gibt es *genau* einen Pfad von r nach v

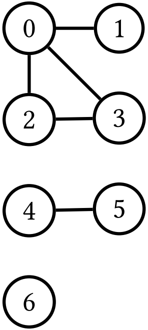
Ausgangsgrad von $v \in V$

$$d^+(v) = |\{w \in V \mid (v, w) \in E\}|$$

Behauptung: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$

Indirekter Beweis: Ang. für jedes $v \in V$ gilt $d^+(v) \geq 1$.
Dann ist $\sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$.
Außerdem ist $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V| - 1$.
Wegen $\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v)$, folgt $|V| - 1 \geq |V|$,
im Widerspruch zur Definition von $\geq$.

Zusammenhangskomponenten



$G = (V, E)$ ungerichteter Graph

Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt
Zusammenhangskomponente von G gdw.

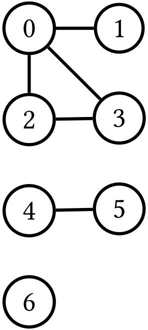
- G' zusammenhängend
- Für jeden zusammenhängenden Teilgraphen $G'' = (V'', E'')$ von G gilt

$$V'' \cap V' = \emptyset \quad \text{oder} \quad V'' \subseteq V' \land E'' \subseteq E'$$

Intuition: Zusammenhangskomponente ist «maximaler» zusammenhängender Teilgraph von G

Tatsache: Es gibt mindestens eine Zusammenhangskomponente

Zusammenhangskomponenten



$G_i = (V_i, E_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, alle Zusammenhangskomponenten von G

- $k \in \mathbb{N}_+$ deren Anzahl

Behauptung: V_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sind paarweise disjunkt
Folgerung: E_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, sind paarweise disjunkt
Behauptung:

$$\bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,k\}} V_i = V \quad \text{und} \quad \bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,k\}} E_i = E$$

Alles ohne Beweis! :(

Intuition: Zusammenhangskomponenten «partitionieren» G

Untere Schranke

Behauptung: Für jeden zshg. ung. Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$|E| \geq |V| - 1$$

Beweis durch vollständige Induktion über Knotenzahl:

Untere Schranke

Behauptung: Für jeden zshg. ung. Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$|E| \geq |V| - 1$$

Beweis durch vollständige Induktion über Knotenzahl:

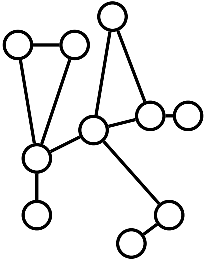
IA: Für jeden zshg. ung. Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 1$ gilt $|E| \geq 0 = |V| - 1$.

Untere Schranke

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$

Untere Schranke



IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$

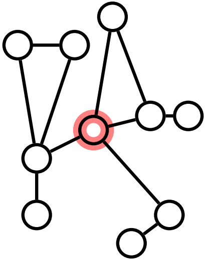
Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$.

Untere Schranke

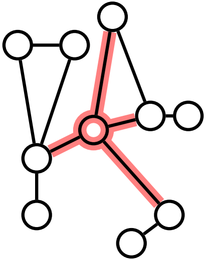
IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \le n : |E'| \ge |V'| - 1. \quad \text{(IV)}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$.



Untere Schranke

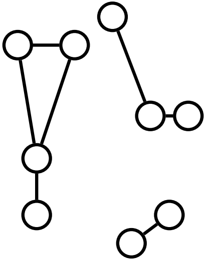


IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \quad \text{(IV)}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$.

Untere Schranke

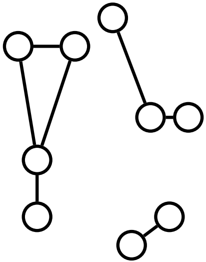


IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$.

Untere Schranke

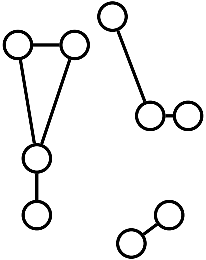


IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \le n : |E'| \ge |V'| - 1. \tag{IV}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$.

Untere Schranke



IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

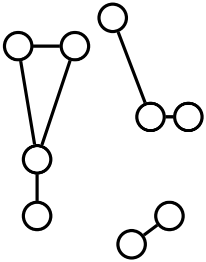
$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$.

Untere Schranke

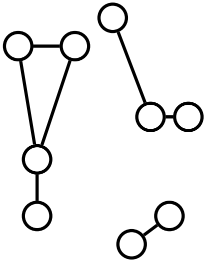
IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \quad \text{(IV)}$$



Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$. Für jedes i gilt nach (IV), dass $|E'_i| \geq |V'_i| - 1$.

Untere Schranke



IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$

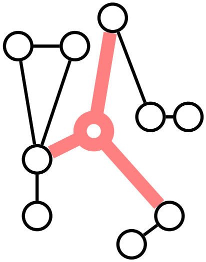
Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$. Für jedes i gilt nach (IV), dass $|E'_i| \geq |V'_i| - 1$. Also gilt

$$|E'| = \sum_i |E'_i| \geq \sum_i (|V'_i| - 1) = |V'| - k = |V| - 1 - k.$$

Untere Schranke

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \quad \text{(IV)}$$

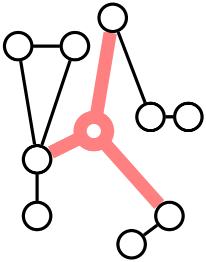


Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$. Für jedes i gilt nach (IV), dass $|E'_i| \geq |V'_i| - 1$. Also gilt

$$|E'| = \textstyle\sum_i |E'_i| \geq \sum_i (|V'_i| - 1) = |V'| - k = |V| - 1 - k.$$

Für jedes i gibt es, da G zshg. ist, ein $v'_i \in V'_i$ so, dass $\{v, v'_i\} \in E$,

Untere Schranke



IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \quad \text{(IV)}$$

Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$. Für jedes i gilt nach (IV), dass $|E'_i| \geq |V'_i| - 1$. Also gilt

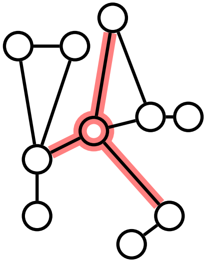
$$|E'| = \textstyle\sum_i |E'_i| \geq \sum_i (|V'_i| - 1) = |V'| - k = |V| - 1 - k.$$

Für jedes i gibt es, da G zshg. ist, ein $v'_i \in V'_i$ so, dass $\{v, v'_i\} \in E$, und wegen $v \notin V'$, gilt $\{v, v'_i\} \notin E'$.

Untere Schranke

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass

$$\forall G' = (V', E') \text{ ung., zshg. mit } |V'| \leq n : |E'| \geq |V'| - 1. \tag{IV}$$



Es sei $G = (V, E)$ ung., zshg. mit $|V| = n + 1$. Wähle $v \in V$. Setze $V' = V \setminus \{v\}$ und $E' = E \cap 2^{V'}$. Weiter seien $G'_i = (V'_i, E'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, die Zshgkmp. von $G' = (V', E')$. Dann gilt $\dot\bigcup_i V'_i = V'$ und $\dot\bigcup_i E'_i = E'$. Für jedes i gilt nach (IV), dass $|E'_i| \geq |V'_i| - 1$. Also gilt

$$|E'| = \sum_i |E'_i| \geq \sum_i (|V'_i| - 1) = |V'| - k = |V| - 1 - k.$$

Für jedes i gibt es, da G zshg. ist, ein $v'_i \in V'_i$ so, dass $\{v, v'_i\} \in E$, und wegen $v \notin V'$, gilt $\{v, v'_i\} \notin E'$. Also gilt

$$|E| \geq |E'| + k \geq (|V| - 1 - k) + k = |V| - 1.$$

Untere Schranke

Behauptung: Für jeden zshg. ung. Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$|E| \geq |V| - 1$$

Bemerkung: Untere Schranke $|V| - 1$ optimal

- $n \in \mathbb{N}_+$
- $G_n = (\mathbb{Z}_n, E_n)$ mit $E_n = \{\{x, x+1\} \mid x \in \mathbb{Z}_{n-1}\}$
- G_n is zusammenhängend
- $|E_n| = n - 1 = |\mathbb{Z}_n| - 1$