Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Formalisierung

Jeder der Julia kennt mag sie.

Formalisierung

Jeder der Julia kennt mag sie.

- Universell gebundenes Variablensymbol `x`
- Konstantensymbol `Julia`
- Zweistellige Relationssymbole `kennt`, `mag`
- Aussagenlogische Konnektive $\rightarrow$

Formalisierung

Jeder der Julia kennt mag sie.

- Universell gebundenes Variablensymbol `x`
- Konstantensymbol `Julia`
- Zweistellige Relationssymbole `kennt`, `mag`
- Aussagenlogische Konnektive $\rightarrow$

$$\forall \mathtt{x}(\mathtt{kennt}(\mathtt{x},\mathtt{Julia}) \rightarrow \mathtt{mag}(\mathtt{x},\mathtt{Julia}))$$

Formalisierung

Niemand der Statistikklasse ist klüger als jedermann der Logikklasse.

Formalisierung

Niemand der Statistikklasse ist klüger als jedermann der Logikklasse.

- Existentiell gebundenes Variablensymbol `x`
- Universell gebundenes Variablensymbol `y`
- Einstellige Relationssymbole `in_Skl`, `in_Lkl`
- Zweistelliges Relationssymbol `klger_als`
- Aussagenlogische Konnektive $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$

Formalisierung

Niemand der Statistikklasse ist klüger als jedermann der Logikklasse.

- Existentiell gebundenes Variablensymbol $\mathtt{x}$
- Universell gebundenes Variablensymbol $\mathtt{y}$
- Einstellige Relationssymbole in_Skl, in_Lkl
- Zweistelliges Relationssymbol klger_als
- Aussagenlogische Konnektive $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$

$$\neg\exists \mathtt{x}(\mathtt{in\_Skl}(\mathtt{x}) \wedge \forall \mathtt{y}(\mathtt{in\_Lkl}(\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{klger\_als}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

oder logische äquivalent

$$\forall \mathtt{x}(\mathtt{in\_Skl}(\mathtt{x}) \rightarrow \exists \mathtt{y}(\mathtt{in\_Lkl}(\mathtt{y}) \wedge \neg\mathtt{klger\_als}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Formalisierung

Wenn alle Freunde von Martin Freunde von John sind und Peter nicht Johns Freund ist, so ist Peter nicht Martins Freund.

Formalisierung

Wenn alle Freunde von Martin Freunde von John sind und Peter nicht Johns Freund ist, so ist Peter nicht Martins Freund.

- Universell gebundenes Variablensymbol $\mathtt{x}$
- Zweistelliges Relationssymbol $\mathtt{Fr}$
- Konstantensymbole $\mathtt{m}$, $\mathtt{j}$, $\mathtt{p}$
- Aussagenlogische Konnektive $\to$, $\wedge$, $\neg$

Formalisierung

Wenn alle Freunde von Martin Freunde von John sind und Peter nicht Johns Freund ist, so ist Peter nicht Martins Freund.

- Universell gebundenes Variablensymbol $\mathtt{x}$
- Zweistelliges Relationssymbol $\mathtt{Fr}$
- Konstantensymbole $\mathtt{m}$, $\mathtt{j}$, $\mathtt{p}$
- Aussagenlogische Konnektive $\rightarrow$, $\wedge$, $\neg$

$$(\forall \mathtt{x}(\mathtt{Fr}(\mathtt{x},\mathtt{m}) \rightarrow \mathtt{Fr}(\mathtt{x},\mathtt{j})) \wedge \neg\mathtt{Fr}(\mathtt{p},\mathtt{j})) \rightarrow \neg\mathtt{Fr}(\mathtt{p},\mathtt{m})$$

Allgemeingültig!

Allgemeingültigkeit

Für alle prädikatenlogischen Formeln X, Y gilt

$X \wedge Y$ allgemeingültig

gdw.

X und Y allgemeingültig

Für alle prädikatenlogischen Formeln U, V gilt

$$U \leftrightarrow V = (U \to V) \wedge (V \to U)$$

also

$U \leftrightarrow V$ allgemeingültig

gdw.

$U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Allgemeingültigkeit

G, H prädikatenlogische Formeln

Behauptung: Die prädikatenlogische Formel

$$(\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H)) \leftrightarrow (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$$

ist allgemeingültig.

$U = (\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H))$, $V = (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$

Umformulierung: Die prädikatenlogischen Formeln

$$U \rightarrow V \text{ und } V \rightarrow U$$

sind allgemeingültig.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H)),\ V = (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \rightarrow V$ und $V \rightarrow U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \rightarrow V$ allgemeingültig.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)), V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)), V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)), V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)),\ V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H))$, $V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H))$, $V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$$\neg val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}.$$

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)), V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$\neg val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)), V = (\forall \mathtt{x} G \to \exists \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$\neg val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \to H)),\ V = (\forall x G \to \exists x H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$\neg val_{D,I,\beta}(\forall x G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$. Somit gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \to H)), V = (\forall x G \to \exists x H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \to V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$\neg val_{D,I,\beta}(\forall x G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$. Somit gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(H) = \mathbf{w}$. Damit gilt

$val_{D,I,\beta_x^d}(G \to H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \rightarrow H))$, $V = (\forall x G \rightarrow \exists x H)$

Behauptung: $U \rightarrow V$ und $V \rightarrow U$ allgemeingültig

Beweis: Nach Aufgabe 7.3 ist $U \rightarrow V$ allgemeingültig. Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Nach Definition gilt $val_{D,I,\beta}(V \rightarrow U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(V \rightarrow U) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$\neg val_{D,I,\beta}(\forall x G) \vee val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$val_{D,I,\beta}(\exists x H) = \mathbf{w}$. Somit gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(H) = \mathbf{w}$. Damit gilt $val_{D,I,\beta_x^d}(G \rightarrow H) = \mathbf{w}$. Also gilt $val_{D,I,\beta}(\exists x(G \rightarrow H)) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \to H)),\ V = (\forall x G \to \forall x H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{f}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)),\ V = (\forall \mathtt{x} G \to \forall \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(G) = \mathbf{f}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H)), V = (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \forall \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \rightarrow V$ und $V \rightarrow U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \rightarrow U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(G) = \mathbf{f}$. Somit gilt $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(G \rightarrow H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \to H)), V = (\forall x G \to \forall x H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(G) = \mathbf{f}$. Somit gilt $val_{D,I,\beta_x^d}(G \to H) = \mathbf{w}$. Also gilt $val_{D,I,\beta}(\exists x(G \to H)) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \rightarrow H)), V = (\forall x G \rightarrow \forall x H)$

Behauptung: $U \rightarrow V$ und $V \rightarrow U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \rightarrow U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(G) = \mathbf{f}$. Somit gilt $val_{D,I,\beta_x^d}(G \rightarrow H) = \mathbf{w}$. Also gilt $val_{D,I,\beta}(\exists x(G \rightarrow H)) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists \mathtt{x}(G \to H)),\ V = (\forall \mathtt{x} G \to \forall \mathtt{x} H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(G) = \mathbf{f}$. Somit gilt $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(G \to H) = \mathbf{w}$. Also gilt $val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x}(G \to H)) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

$U = (\exists x(G \to H)), V = (\forall x G \to \forall x H)$

Behauptung: $U \to V$ und $V \to U$ allgemeingültig

Beweis: ... Nach Definition gilt
$val_{D,I,\beta}(V \to U) = \neg val_{D,I,\beta}(V) \vee val_{D,I,\beta}(U)$.

Fall 2: ...

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta}(\forall x G) = \mathbf{f}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(G) = \mathbf{f}$. Somit gilt $val_{D,I,\beta_x^d}(G \to H) = \mathbf{w}$. Also gilt $val_{D,I,\beta}(\exists x(G \to H)) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(V \to U) = \mathbf{w}$. $\square$

Nicht-Allgemeingültigkeit

Behauptung: Es gibt eine prädikatenlogische Formel H so, dass

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H \rightarrow \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$$

nicht allgemeingültig ist.

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G(x,y)} \rightarrow \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} \mathtt{G(x,y)}$$

ist nicht allgemeingültig.

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \rightarrow \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(\mathtt{G}) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x \mathtt{G}(x,y) \to \exists x \forall y \mathtt{G}(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(\mathtt{G}) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(\mathtt{G})$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_y^d)_x^{d+1}}(G(x,y)) = \mathbf{w}$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \to \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_y^d)_x^{d+1}}(G(x,y)) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_y^d}(\exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$.

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d+1, d) \in I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_y^d)_x^{d+1}}(G(x,y)) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_y^d}(\exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall y \exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$.

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_y^d)_x^{d+1}}(G(x,y)) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_y^d}(\exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall y \exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$.
- Für jedes $e \in D$ gilt $e \leq e$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \to \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(\mathtt{G}) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(\mathtt{G})$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_{\mathtt{y}}^{d})_{\mathtt{x}}^{d+1}}(\mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_{\mathtt{y}}^{d}}(\exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$.
- Für jedes $e \in D$ gilt $e \leq e$, also $(e, e) \notin I(\mathtt{G})$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \to \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(\mathtt{G}) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(\mathtt{G})$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_{\mathtt{y}}^{d})_{\mathtt{x}}^{d+1}}(\mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_{\mathtt{y}}^{d}}(\exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$.
- Für jedes $e \in D$ gilt $e \le e$, also $(e, e) \notin I(\mathtt{G})$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_{\mathtt{x}}^{e})_{\mathtt{y}}^{e}}(\mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{f}$,

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \rightarrow \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(\mathtt{G}) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d + 1, d) \in I(\mathtt{G})$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_{\mathtt{y}}^{d})_{\mathtt{x}}^{d+1}}(\mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_{\mathtt{y}}^{d}}(\exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{w}$.
- Für jedes $e \in D$ gilt $e \leq e$, also $(e, e) \notin I(\mathtt{G})$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_{\mathtt{x}}^{e})_{\mathtt{y}}^{e}}(\mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{f}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_{\mathtt{x}}^{e}}(\forall \mathtt{y} \mathtt{G}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{f}$.

Nicht-Allgemeingültigkeit

Konkretisierung: Die prädikatenlogische Formel

$$\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)$$

ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Es sei $(\mathbb{N}_0, I)$ eine passende Interpretation mit $I(G) = R_>$ und es sei β eine passende Variablenbelegung.

- Für jedes $d \in D$ gilt $d + 1 > d$, also $(d+1, d) \in I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_y^d)_x^{d+1}}(G(x,y)) = \mathbf{w}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_y^d}(\exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall y \exists x G(x,y)) = \mathbf{w}$.
- Für jedes $e \in D$ gilt $e \leq e$, also $(e,e) \notin I(G)$, somit $val_{\mathbb{N}_0, I, (\beta_x^e)_y^e}(G(x,y)) = \mathbf{f}$, damit $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta_x^e}(\forall y G(x,y)) = \mathbf{f}$. Folglich gilt $val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\exists x \forall y G(x,y)) = \mathbf{f}$.

Schließlich folgt
$val_{\mathbb{N}_0, I, \beta}(\forall y \exists x G(x,y) \rightarrow \exists x \forall y G(x,y)) = \mathbf{f}$. □

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \to \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel. Weiter seien (D, I) eine passende Interpretation und β eine passende Variablenbelegung.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \to \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel. Weiter seien (D, I) eine passende Interpretation und β eine passende Variablenbelegung. Ferner seien $F_1 = \exists x \forall y H$ und $F_2 = \forall y \exists x H$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel. Weiter seien (D, I) eine passende Interpretation und β eine passende Variablenbelegung. Ferner seien $F_1 = \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$ und $F_2 = \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$. Es gilt

$$val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \neg val_{D,I,\beta}(F_1) \vee val_{D,I,\beta}(F_2).$$

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \to \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel. Weiter seien (D, I) eine passende Interpretation und β eine passende Variablenbelegung. Ferner seien $F_1 = \exists x \forall y H$ und $F_2 = \forall y \exists x H$. Es gilt

$$val_{D,I,\beta}(F_1 \to F_2) = \neg val_{D,I,\beta}(F_1) \vee val_{D,I,\beta}(F_2).$$

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{f}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \rightarrow \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: Es sei H eine prädikatenlogische Formel. Weiter seien (D, I) eine passende Interpretation und β eine passende Variablenbelegung. Ferner seien $F_1 = \exists x \forall y H$ und $F_2 = \forall y \exists x H$. Es gilt

$$val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \neg val_{D,I,\beta}(F_1) \vee val_{D,I,\beta}(F_2).$$

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{f}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \to \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists x \forall y H$ ... $F_2 = \forall y \exists x H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \to \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$ ... $F_2 = \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(\forall \mathtt{y} H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \rightarrow \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists x \forall y H$ ... $F_2 = \forall y \exists x H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(\forall y H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit $val_{D,I,(\beta_x^d)_y^e}(H) = \mathbf{w}$,

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$ ... $F_2 = \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(\forall \mathtt{y} H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit $val_{D,I,(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e}}(H) = \mathbf{w}$, wegen $(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e} = (\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}$, also $val_{D,I,(\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}}(H) = \mathbf{w}$,

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \rightarrow \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists x \forall y H$ ... $F_2 = \forall y \exists x H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass
$val_{D,I,\beta_x^d}(\forall y H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit
$val_{D,I,(\beta_x^d)_y^e}(H) = \mathbf{w}$, wegen $(\beta_x^d)_y^e = (\beta_y^e)_x^d$, also
$val_{D,I,(\beta_y^e)_x^d}(H) = \mathbf{w}$, und somit $val_{D,I,\beta_y^e}(\exists x H) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: … $F_1 = \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$ … $F_2 = \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$ …

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass
$val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(\forall \mathtt{y} H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit
$val_{D,I,(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e}}(H) = \mathbf{w}$, wegen $(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e} = (\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}$, also
$val_{D,I,(\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}}(H) = \mathbf{w}$, und somit $val_{D,I,\beta_{\mathtt{y}}^{e}}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.
Folglich gilt $val_{D,I,\beta}(F_2) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists x \forall y H \rightarrow \forall y \exists x H$$

allgemeingültig.

Beweis: … $F_1 = \exists x \forall y H$ … $F_2 = \forall y \exists x H$ …

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_x^d}(\forall y H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit $val_{D,I,(\beta_x^d)_y^e}(H) = \mathbf{w}$, wegen $(\beta_x^d)_y^e = (\beta_y^e)_x^d$, also $val_{D,I,(\beta_y^e)_x^d}(H) = \mathbf{w}$, und somit $val_{D,I,\beta_y^e}(\exists x H) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{D,I,\beta}(F_2) = \mathbf{w}$. Schließlich folgt $val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \mathbf{w}$.

Allgemeingültigkeit

Behauptung: Für jede prädikatenlogische Formel H ist

$$\exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H \rightarrow \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$$

allgemeingültig.

Beweis: ... $F_1 = \exists \mathtt{x} \forall \mathtt{y} H$ ... $F_2 = \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{x} H$ ...

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Dann gibt es ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta_{\mathtt{x}}^{d}}(\forall \mathtt{y} H) = \mathbf{w}$. Für jedes $e \in D$ gilt damit $val_{D,I,(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e}}(H) = \mathbf{w}$, wegen $(\beta_{\mathtt{x}}^{d})_{\mathtt{y}}^{e} = (\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}$, also $val_{D,I,(\beta_{\mathtt{y}}^{e})_{\mathtt{x}}^{d}}(H) = \mathbf{w}$, und somit $val_{D,I,\beta_{\mathtt{y}}^{e}}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$. Folglich gilt $val_{D,I,\beta}(F_2) = \mathbf{w}$. Schließlich folgt $val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(F_1 \rightarrow F_2) = \mathbf{w}$. $\square$