# Grundbegriffe der Informatik

## Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

# Palindrome — anna, otto und der reliefpfeiler

Wort $w$ Palindrom gdw.

$$\text{für jedes } i \in \mathbb{Z}_{|w|} \text{ gilt } w(i) = w(|w| - 1 - i)$$

$L_{\text{pali}} = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$

Für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ gilt $w \in L_{\text{pali}}$ gdw.

- $w = \varepsilon$ oder
- $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ oder
- $w_0 = w_{|w|-1}$ und $w_{[1, |w|-2]} \in L_{\text{pali}}$

$L_{\text{pali}} = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{a}\}L_{\text{pali}}\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\}L_{\text{pali}}\{\mathtt{b}\}$

# Palindrome — anna, otto und der reliefpfeiler

Wort $w$ Palindrom gdw.

$$\text{für jedes } i \in \mathbb{Z}_{|w|} \text{ gilt } w(i) = w(|w| - 1 - i)$$

$L_{\text{pali}} = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$

$L_{\text{pali}} = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{a}\}L_{\text{pali}}\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\}L_{\text{pali}}\{\mathtt{b}\}$

Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ mit

$$\begin{aligned} N &= \{\mathtt{S}\}, \\ T &= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \\ P &= \{\mathtt{S} \to \varepsilon \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{bSb}\} \end{aligned}$$

erzeugt $L_{\text{pali}}$

# Nicht-Palindrome — abb, aabba, baabbab

$L_{\mathrm{ni}} = A^* \setminus L_{\mathrm{pali}}$, wobei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

Für jedes $w \in A^*$ gilt $w \in L_{\mathrm{ni}}$ gdw.

- $|w| \geq 2$ und
- entweder $w_0 \neq w_{|w|-1}$
  oder $w_0 = w_{|w|-1}$ und $w_{[1,|w|-2]} \in L_{\mathrm{ni}}$

$$L_{\mathrm{ni}} = \{\mathtt{a}\}A^*\{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}A^*\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}L_{\mathrm{ni}}\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\}L_{\mathrm{ni}}\{\mathtt{b}\}$$

# Nicht-Palindrome — abb, aabba, baabbab

$L_{\text{ni}} = A^* \setminus L_{\text{pali}}$, wobei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$

$L_{\text{ni}} = \{\texttt{a}\}A^*\{\texttt{b}\} \cup \{\texttt{b}\}A^*\{\texttt{a}\} \cup \{\texttt{a}\}L_{\text{ni}}\{\texttt{a}\} \cup \{\texttt{b}\}L_{\text{ni}}\{\texttt{b}\}$

Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, \texttt{S}, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N &= \{\texttt{S}, \texttt{U}\}, \\
T &= \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \\
P &= \{\texttt{S} \to \texttt{aUb} \mid \texttt{bUa} \mid \texttt{aSa} \mid \texttt{bSb}, \\
&\qquad \texttt{U} \to \varepsilon \mid \texttt{a} \mid \texttt{b} \mid \texttt{UU}\}
\end{aligned}
$$

erzeugt $L_{\text{ni}}$

# Vereinigung, Produkt und Konkatenationsabschluss

$G = (N, T, S, P)$ kontextfreie Grammatik

Für jedes $X \in N$ sei $L_X = \{w \in T^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

$L_S = L(G)$

$X, Y, Z \in N$ und $w \in T^*$

Wenn $X \to w \in P$, dann $L_X \supseteq \{w\}$

- $X \Rightarrow w$

Wenn $X \to Y \in P$ und $X \to Z \in P$,
dann $L_X \supseteq L_Y \cup L_Z$

- Für jedes $u \in L_Y$ gilt $X \Rightarrow Y \Rightarrow^* u$
- Für jedes $v \in L_Z$ gilt $X \Rightarrow Z \Rightarrow^* v$

# Vereinigung, Produkt und Konkatenationsabschluss

$G = (N, T, S, P)$ kontextfreie Grammatik

Für jedes $X \in N$ sei $L_X = \{w \in T^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

$L_S = L(G)$

$X, Y, Z \in N$ und $w \in T^*$

Wenn $X \to YZ \in P$, dann $L_X \supseteq L_Y \cdot L_Z$

- Für jedes $u \in L_Y$ und jedes $v \in L_Z$ gilt $X \Rightarrow YZ \Rightarrow^* uZ \Rightarrow^* uv$

# Vereinigung, Produkt und Konkatenationsabschluss

$G = (N, T, S, P)$ kontextfreie Grammatik

Für jedes $X \in N$ sei $L_X = \{w \in T^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

$L_S = L(G)$

$X, Y, Z \in N$ und $w \in T^*$

Wenn $X \to \varepsilon \in P$ und $X \to XY \in P$,
dann $L_X \supseteq L_Y^*$

- $X \Rightarrow \varepsilon$
- Für jedes $u \in L_Y$ gilt $X \Rightarrow XY \Rightarrow Y \Rightarrow^* u$
- Für alle $u, v \in L_Y$ gilt $X \Rightarrow XY \Rightarrow XYY \Rightarrow YY \Rightarrow^* uY \Rightarrow^* uv$
- usw.

# Vereinigung, Produkt und Konkatenationsabschluss

$G = (N, T, S, P)$ kontextfreie Grammatik

Für jedes $X \in N$ sei $L_X = \{w \in T^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

$L_S = L(G)$

$X, Y, Z \in N$ und $w \in T^*$

Wenn $X \to Y \in P$ und $X \to XY \in P$,
dann $L_X \supseteq L_Y^+$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{aaSa}\}$

*Behauptung:* Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $\mathtt{S} \Rightarrow^* \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Umformulierung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $\mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{aaSa}\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $\mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.A.: Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\mathtt{S} \Rightarrow^0 \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$.

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n, \text{ dann } n \leq k \leq 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.A.: Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $S \Rightarrow^0 a^k S a^n$.
Dann gilt $a^k S a^n = S$.

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{aaSa}\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } \mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n, \text{ dann } n \le k \le 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.A.: Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\mathtt{S} \Rightarrow^0 \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$.
Dann gilt $\mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n = \mathtt{S}$.
Also gilt $k = n = 0$.

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{aaSa}\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $\mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$, dann $n \le k \le 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.A.: Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\mathtt{S} \Rightarrow^0 \mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n$.
Dann gilt $\mathtt{a}^k\mathtt{S}\mathtt{a}^n = \mathtt{S}$.
Also gilt $k = n = 0$.
Folglich gilt $n \le k \le 2n$.

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n \text{, dann } n \le k \le 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n \text{, dann } n \le k \le 2n. \tag{I.V.}$$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \rightarrow b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n \text{, dann } n \leq k \leq 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n \text{, dann } n \leq k \leq 2n. \qquad \text{(I.V.)}$$

$$\text{Weiter seien } \tilde{k}, \tilde{n} \in \mathbb{N}_0 \text{ so, dass } S \Rightarrow^{i+1} a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}.$$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n, \text{ dann } n \leq k \leq 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n, \text{ dann } n \leq k \leq 2n. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter seien $\tilde{k}, \tilde{n} \in \mathbb{N}_0$ so, dass $S \Rightarrow^{i+1} a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$.
Dann gibt es $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}.$$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^i a^k S a^n$, dann $n \le k \le 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } S \Rightarrow^i a^k S a^n, \text{ dann } n \le k \le 2n. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter seien $\tilde{k}, \tilde{n} \in \mathbb{N}_0$ so, dass $S \Rightarrow^{i+1} a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$.
Dann gibt es $k, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}.$$

Nach (I.V.) gilt $n \le k \le 2n$.

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^i a^k S a^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: ... $S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$ ... $n \leq k \leq 2n$.

Fall 1: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k a S a a^n$.

Fall 2: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aa S a a^n$.

In beiden Fällen gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2\tilde{n}$. $\square$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \rightarrow b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^i a^k S a^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: … $S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$ … $n \leq k \leq 2n$.

Fall 1: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aSaa^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 1$ und $\tilde{n} = n + 1$.

Fall 2: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aaSaa^n$.

In beiden Fällen gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2\tilde{n}$. $\square$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^i a^k S a^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: … $S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$ … $n \leq k \leq 2n$.

Fall 1: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aSa a^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 1$ und $\tilde{n} = n + 1$.

Somit gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2n + 1 \leq 2(n + 1) = 2\tilde{n}$.

Fall 2: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aaSa a^n$.

In beiden Fällen gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2\tilde{n}$. $\square$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ mit $P = \{S \to b \mid aSa \mid aaSa\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $S \Rightarrow^i a^k S a^n$, dann $n \leq k \leq 2n$.

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: … $S \Rightarrow^i a^k S a^n \Rightarrow a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}}$ … $n \leq k \leq 2n$.

Fall 1: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aSaa^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 1$ und $\tilde{n} = n + 1$.

Somit gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2n + 1 \leq 2(n + 1) = 2\tilde{n}$.

Fall 2: $a^{\tilde{k}} S a^{\tilde{n}} = a^k aaSaa^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 2$ und $\tilde{n} = n + 1$.

In beiden Fällen gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2\tilde{n}$. $\square$

# Ein Beweis über Länge der Ableitung

$G = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit $P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{b} \mid \mathtt{aSa} \mid \mathtt{aaSa}\}$

*Behauptung:* Für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } \mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{Sa}^n\text{, dann } n \leq k \leq 2n.$$

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über $i$

I.S.: … $\mathtt{S} \Rightarrow^i \mathtt{a}^k\mathtt{Sa}^n \Rightarrow \mathtt{a}^{\tilde{k}}\mathtt{Sa}^{\tilde{n}}$ … $n \leq k \leq 2n$.

Fall 1: $\mathtt{a}^{\tilde{k}}\mathtt{Sa}^{\tilde{n}} = \mathtt{a}^k\mathtt{aSaa}^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 1$ und $\tilde{n} = n + 1$.

Somit gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2n + 1 \leq 2(n+1) = 2\tilde{n}$.

Fall 2: $\mathtt{a}^{\tilde{k}}\mathtt{Sa}^{\tilde{n}} = \mathtt{a}^k\mathtt{aaSaa}^n$.

Dann gilt $\tilde{k} = k + 2$ und $\tilde{n} = n + 1$.

Somit gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2n + 2 = 2(n+1) = 2\tilde{n}$.

In beiden Fällen gilt $\tilde{n} \leq \tilde{k} \leq 2\tilde{n}$. $\square$

# Nachtrag zum vorangegangenen Beweis

Nach Definition gilt $u \Rightarrow^{i+1} w$ gdw.

$$\text{es gibt ein } v \in V^* \text{ so, dass } u \Rightarrow v \Rightarrow^{i} w$$

Durch vollständige Induktion kann man beweisen:
Es gilt $u \Rightarrow^{i+1} w$ gdw.

$$\text{es gibt ein } v \in V^* \text{ so, dass } u \Rightarrow^{i} v \Rightarrow w$$

Deswegen konnten wir im Induktionsschritt
aus $\mathtt{S} \Rightarrow^{i+1} \mathtt{a}^{\tilde{k}}\mathtt{S}\mathtt{a}^{\tilde{n}}$ schließen:

$$\text{Es gibt ein } v \in V^* \text{ so, dass } \mathtt{S} \Rightarrow^{i} v \Rightarrow \mathtt{a}^{\tilde{k}}\mathtt{S}\mathtt{a}^{\tilde{n}}$$

# Produkt von Relationen

$R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ Relationen

Für jedes $(x, z) \in M_1 \times M_3$ gilt $x(S \circ R)z$ gdw.

es gibt ein $y \in M_2$ so, dass $xRy$ und $ySz$

$<$ sei Kleiner-Als-Relation auf $\mathbb{N}_0$

- Für alle $x, z \in \mathbb{N}_0$ gilt
  - $x < z$ gdw. $z - x \geq 1$
  - $x(< \circ <)z$ gdw.

    es gibt ein $y \in \mathbb{N}_0$ so, dass $x < y$ und $y < z$

    gdw. $x + 1 < z$ gdw. $z - x \geq 2$
- $< \circ < \neq <$

# Produkt von Relationen

$R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ Relationen

Für jedes $(x, z) \in M_1 \times M_3$ gilt $x(S \circ R)z$ gdw.

es gibt ein $y \in M_2$ so, dass $xRy$ und $ySz$

$<$ sei Kleiner-Als-Relation auf $\mathbb{R}$

- *Behauptung:* $< \circ < \; = \; <$
- *Beweis:*

$\subseteq$: Es seien $x, z \in \mathbb{R}$ so, dass $x(< \circ <)z$.
Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ so, dass $x < y$ und $y < z$.
Somit gilt $x < z$.

$\supseteq$: Es seien $x, z \in \mathbb{R}$ so, dass $x < z$.
Dann gelten $x < \frac{x+z}{2}$ und $\frac{x+z}{2} < z$.
Also gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ so, dass $x < y$ und $y < z$.
Somit gilt $x(< \circ <)z$. $\square$

# Reflexiv-transitive Hülle einer Relation

$$R = \{(x,z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid z - x = 1\}$$

Für jedes $(x,z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt

- $xR^0z$ gdw. $z - x = 0$
- $xR^1z$ gdw. $z - x = 1$
- $xR^2z$ gdw.

  es gibt ein $y \in \mathbb{N}_0$ so, dass $xRy$ und $yRz$

  gdw.

  es gibt ein $y \in \mathbb{N}_0$ so, dass $y - x = 1$ und $z - y = 1$

  gdw.

  $$z - x = 2$$

- Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $xR^nz$ gdw. $z - x = n$

# Reflexiv-transitive Hülle einer Relation

$$R = \{(x, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid z - x = 1\}$$

Für jedes $(x, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt

- Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $xR^nz$ gdw. $z - x = n$

Für jedes $(x, z) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt

- $xR^*z$ gdw.

  es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $xR^nz$

  gdw.

  es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $z - x = n$

  gdw.

  $x \leq z$

$$R^* = \leq$$