Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Block-Codierung

`aabaacabaacaabaaacacaabbaccabb`
`aaaabbaccaaaaaaabaacaabbabbaca`
`abaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc`

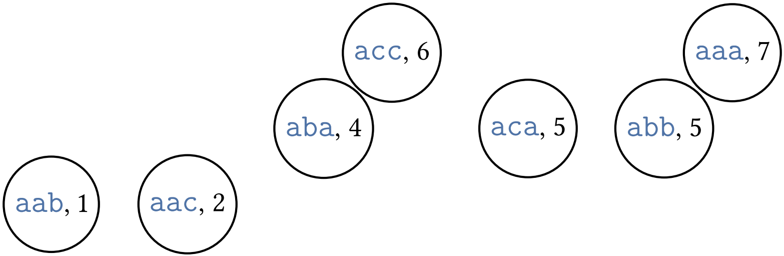
Schritt 1: Wort in Blöcke unterteilen (hier: Länge 3)

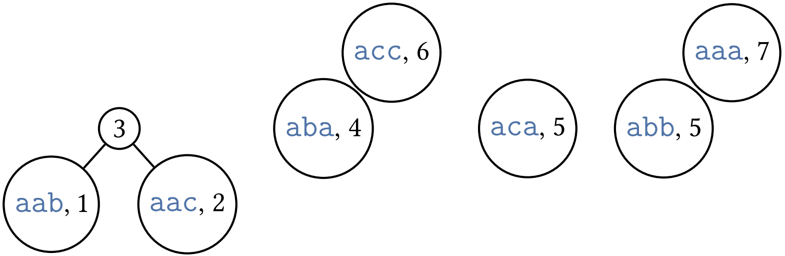
`aab aac aba aca aba aac aca abb acc abb`
`aaa abb acc aaa aaa aba aca abb abb aca`
`aba aca acc aaa aaa acc aaa aaa acc acc`

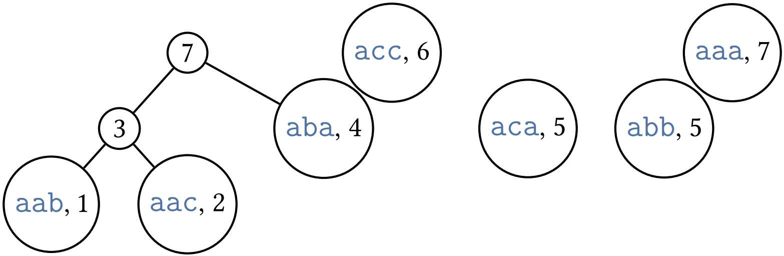
Schritt 2: Vorkommen zählen

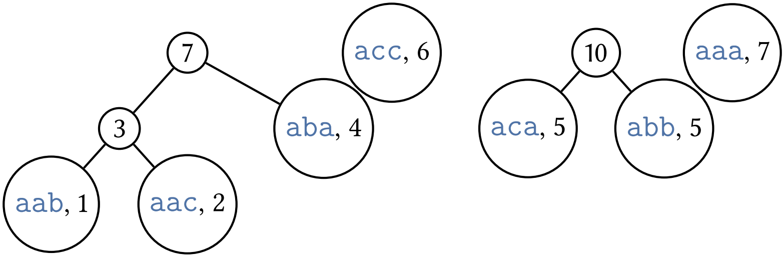
aab	aac	aba	aca	abb	acc	aaa
1	2	4	5	5	6	7

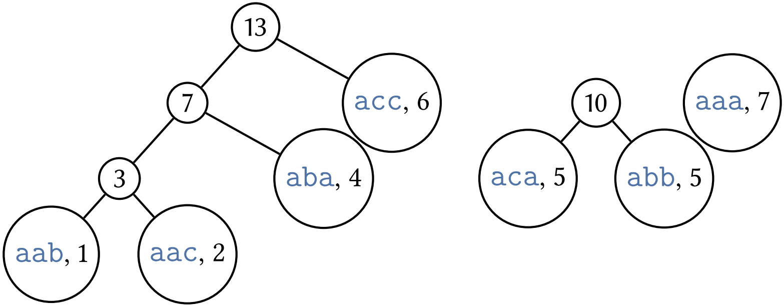
Schritt 3: Baum erstellen

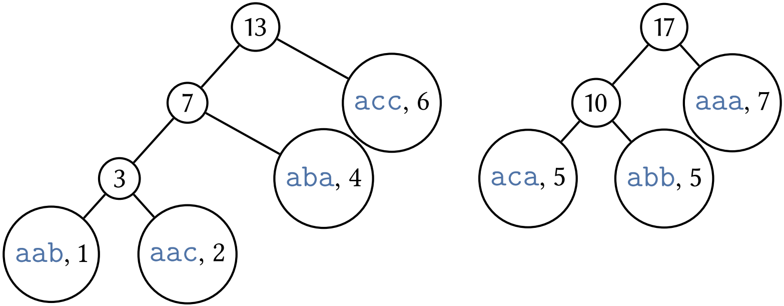

acc, 6
aaa, 7
aba, 4
aca, 5
abb, 5
aab, 1
aac, 2

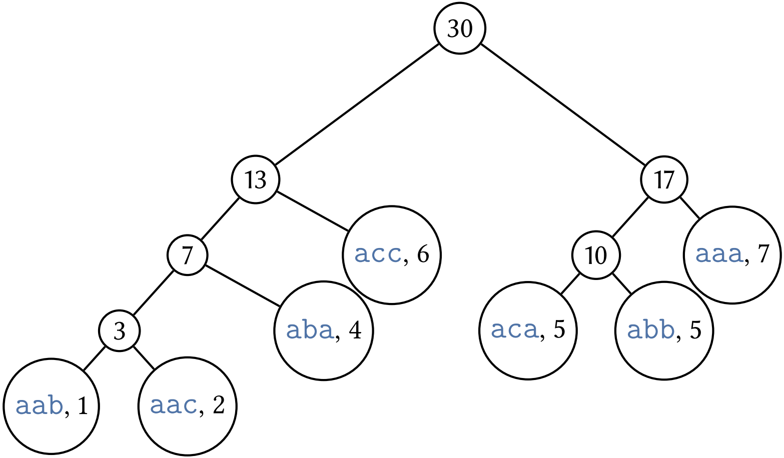

acc, 6
aaa, 7
3
aba, 4
aca, 5
abb, 5
aab, 1
aac, 2

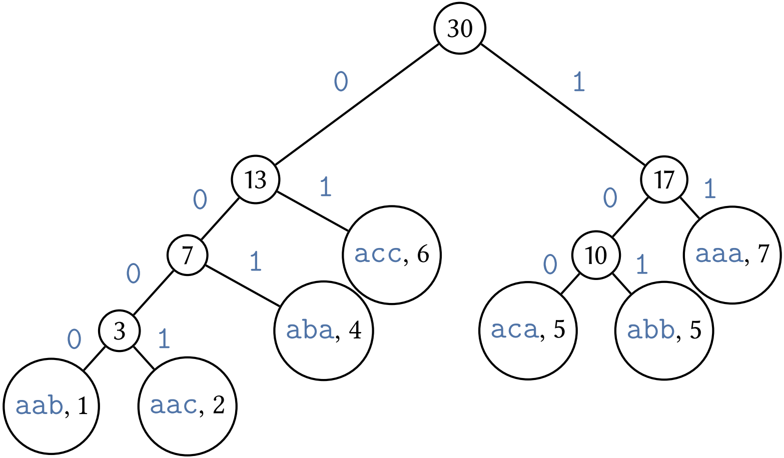

7
acc, 6
aaa, 7
3
aba, 4
aca, 5
abb, 5
aab, 1
aac, 2


7
acc, 6
3
aba, 4
aab, 1
aac, 2
10
aaa, 7
aca, 5
abb, 5


13
7
acc, 6
3
aba, 4
aab, 1
aac, 2
10
aaa, 7
aca, 5
abb, 5


13
7
acc, 6
3
aba, 4
aab, 1
aac, 2
17
10
aaa, 7
aca, 5
abb, 5


30
13
17
7
acc, 6
10
aaa, 7
3
aba, 4
aca, 5
abb, 5
aab, 1
aac, 2


30
0
1
13
17
0
1
0
1
7
acc, 6
10
aaa, 7
0
1
0
1
3
aba, 4
aca, 5
abb, 5
0
1
aab, 1
aac, 2

Block-Codierung

Schritt 4: Codierung der einzelnen Blöcke ablesen

aab	aac	aba	aca	abb	acc	aaa
0000	0001	001	100	101	01	11

Schritt 5: Wort codieren

00000001001100001000110010101101
1110101111100110010110 1100

001100011111011110101

Homomorphismen — Das allgemeine Konzept

V, W Mengen

$\odot\colon V \times V \to V$, $\oplus\colon W \times W \to W$ binäre Operationen

Abbildung $\varphi\colon V \to W$ heißt Homomorphismus bezüglich $\odot$ und $\oplus$ genau dann, wenn für jedes $u \in V$ und jedes $v \in V$ gilt:

$$\varphi(u \odot v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$$

Homomorphismen sind strukturerhaltende oder strukturverträgliche Abbildungen

Altgriechisch: “homós” (- gleich) und “morphé” (- Form)

Homomorphismen — In dieser Vorlesung

A, B Alphabete

Abbildung $h\colon A^* \to B^*$ heißt *Homomorphismus* genau dann, wenn für jedes $u \in A^*$ und jedes $v \in A^*$ gilt:

$$h(u \cdot v) = h(u) \cdot h(v)$$

Homomorphismus bezüglich Konkatenation auf A^* und B^*

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $w \in A^n$ gilt:

$$h(w) = h(w_0 w_1 \ldots w_{n-1}) = h(w_0)h(w_1)\ldots h(w_{n-1}),$$

wobei $w_i = w(i)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt.

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt.
Beispielsweise gilt $(*)$ für $\mathrm{Trans}_{2,3} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_3$.

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt. Beispielsweise gilt $(*)$ für $\mathrm{Trans}_{2,3} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_3$. Wegen $\mathrm{Num}_2(h(\mathtt{11})) = \mathrm{Num}_3(\mathtt{11}) = 4$, gilt $h(\mathtt{11}) \in \{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{100}\}$.

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt.
Beispielsweise gilt $(*)$ für $\mathrm{Trans}_{2,3} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_3$. Wegen $\mathrm{Num}_2(h(\mathtt{11})) = \mathrm{Num}_3(\mathtt{11}) = 4$, gilt $h(\mathtt{11}) \in \{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{100}\}$.
Wegen $\mathrm{Num}_2(h(\mathtt{1})) = \mathrm{Num}_3(\mathtt{1}) = 1$, gilt $h(\mathtt{1}) \in \{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}$, also $h(\mathtt{1})h(\mathtt{1}) \in \{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\}$.

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt. Beispielsweise gilt $(*)$ für $\mathrm{Trans}_{2,3} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_3$. Wegen $\mathrm{Num}_2(h(11)) = \mathrm{Num}_3(11) = 4$, gilt $h(11) \in \{0\}^*\{100\}$. Wegen $\mathrm{Num}_2(h(1)) = \mathrm{Num}_3(1) = 1$, gilt $h(1) \in \{0\}^*\{1\}$, also $h(1)h(1) \in \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}$. Da $\{0\}^*\{100\} \cap \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\} = \emptyset$, folgt $h(11) \neq h(1)h(1)$.

Von ternärer zur binärer Darstellung

Frage: Existiert ein Homomorphismus $h\colon Z_3^* \to Z_2^*$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } w \in Z_3^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_3(w). \qquad (*)$$

Antwort: Nein!

Beweis: Es sei h eine Abbildung, für die $(*)$ gilt.
Beispielsweise gilt $(*)$ für $\mathrm{Trans}_{2,3} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_3$. Wegen $\mathrm{Num}_2(h(11)) = \mathrm{Num}_3(11) = 4$, gilt $h(11) \in \{0\}^*\{100\}$.
Wegen $\mathrm{Num}_2(h(1)) = \mathrm{Num}_3(1) = 1$, gilt $h(1) \in \{0\}^*\{1\}$, also $h(1)h(1) \in \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\}$. Da $\{0\}^*\{100\} \cap \{0\}^*\{1\}\{0\}^*\{1\} = \emptyset$, folgt $h(11) \neq h(1)h(1)$.
Somit ist h kein Homomorphismus!

Von hexadezimaler zu binärer Darstellung

Existiert ein bedeutungserhaltender Homomorphismus von der hexadezimalen in die binäre Darstellung?

Ja, gerade jener Homomorphismus $h\colon Z_{16}^* \to Z_2^*$, welcher eindeutig festgelegt ist durch:

$$\text{Für jedes } z \in Z_{16} \text{ gilt } h(z) = \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(z))$$

Je vier binäre Ziffern entsprechen einer hexadezimalen Ziffer:

$$h(\mathtt{0}) = \mathtt{0000}, h(\mathtt{1}) = \mathtt{0001}, h(\mathtt{2}) = \mathtt{0010}, \text{ und so weiter}$$

Das funktioniert so gut, da $2^4 = 16$

Beispiel: $h(\mathtt{A} \cdot \mathtt{1}) = h(\mathtt{A}) \cdot h(\mathtt{1}) = \mathtt{1010} \cdot \mathtt{0001}$

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

Für jedes $w \in Z_{16}^*$ gilt $\mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

$$\text{Für jedes } w \in Z_{16}^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$$

Induktionsanfang: Es gilt $h(\epsilon) = \epsilon$. Somit gilt

$$\mathrm{Num}_2(h(\epsilon)) = 0 = \mathrm{Num}_{16}(\epsilon).$$

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

$$\text{Für jedes } w \in Z_{16}^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$$

Induktionsanfang: Es gilt $h(\epsilon) = \epsilon$. Somit gilt

$$\mathrm{Num}_2(h(\epsilon)) = 0 = \mathrm{Num}_{16}(\epsilon).$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in Z_{16}^n \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(u)) = \mathrm{Num}_{16}(u). \qquad \text{(I.V.)}$$

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

$$\text{Für jedes } w \in Z_{16}^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$$

Induktionsanfang: Es gilt $h(\epsilon) = \epsilon$. Somit gilt

$$\mathrm{Num}_2(h(\epsilon)) = 0 = \mathrm{Num}_{16}(\epsilon).$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in Z_{16}^n \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(u)) = \mathrm{Num}_{16}(u). \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in Z_{16}^{n+1}$.

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

$$\text{Für jedes } w \in Z_{16}^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$$

Induktionsanfang: Es gilt $h(\epsilon) = \epsilon$. Somit gilt

$$\mathrm{Num}_2(h(\epsilon)) = 0 = \mathrm{Num}_{16}(\epsilon).$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in Z_{16}^n \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(u)) = \mathrm{Num}_{16}(u). \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in Z_{16}^{n+1}$. Es gibt ein $u \in Z_{16}^n$ und ein $z \in Z_{16}$ so, dass $u \cdot z = w$.

Bedeutungserhaltung

Beweise durch vollständige Induktion über die Wortlänge:

$$\text{Für jedes } w \in Z_{16}^* \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(w)) = \mathrm{Num}_{16}(w)$$

Induktionsanfang: Es gilt $h(\epsilon) = \epsilon$. Somit gilt

$$\mathrm{Num}_2(h(\epsilon)) = 0 = \mathrm{Num}_{16}(\epsilon).$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in Z_{16}^n \text{ gilt } \mathrm{Num}_2(h(u)) = \mathrm{Num}_{16}(u). \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in Z_{16}^{n+1}$. Es gibt ein $u \in Z_{16}^n$ und ein $z \in Z_{16}$ so, dass $u \cdot z = w$. Ferner gibt es $a, b, c, d \in Z_2$, für welche $h(z) = abcd$ gilt. Damit gilt

Bedeutungserhaltung

$\mathrm{Num}_2(h(uz))$

$= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))$

Bedeutungserhaltung

$\mathrm{Num}_2(h(uz))$

$= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))$

$= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd)$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \dots
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Num}_2(h(uz)) \\
&= \mathsf{Num}_2(h(u)h(z)) \\
&= \mathsf{Num}_2(h(u)abcd) \\
&= \mathsf{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathsf{num}_2(d) \\
&= (\mathsf{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathsf{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathsf{num}_2(d) \\
&= \ldots \\
&= \mathsf{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathsf{num}_2(a) \cdot 8 + \mathsf{num}_2(b) \cdot 4 + \mathsf{num}_2(c) \cdot 2 + \mathsf{num}_2(d)
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \dots \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathrm{num}_2(a) \cdot 8 + \mathrm{num}_2(b) \cdot 4 + \mathrm{num}_2(c) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + ((\mathrm{num}_2(a) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(b)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \dots\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathrm{num}_2(a) \cdot 8 + \mathrm{num}_2(b) \cdot 4 + \mathrm{num}_2(c) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + ((\mathrm{num}_2(a) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(b)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathrm{Num}_2(abcd)
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(c))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \dots\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + \mathrm{num}_2(a)\cdot 8 + \mathrm{num}_2(b)\cdot 4 + \mathrm{num}_2(c)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + ((\mathrm{num}_2(a)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(b))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(c))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + \mathrm{Num}_2(abcd)\\
&= \mathrm{Num}_{16}(u)\cdot 16 + \mathrm{Num}_2(h(z)) \qquad \text{(I.V. und Wahl von } abcd\text{)}
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z))\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(c))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \dots\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + \mathrm{num}_2(a)\cdot 8 + \mathrm{num}_2(b)\cdot 4 + \mathrm{num}_2(c)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + ((\mathrm{num}_2(a)\cdot 2 + \mathrm{num}_2(b))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(c))\cdot 2 + \mathrm{num}_2(d)\\
&= \mathrm{Num}_2(h(u))\cdot 16 + \mathrm{Num}_2(abcd)\\
&= \mathrm{Num}_{16}(u)\cdot 16 + \mathrm{Num}_2(h(z)) && \text{(I.V. und Wahl von } abcd\text{)}\\
&= \mathrm{Num}_{16}(u)\cdot 16 + \mathrm{Num}_{16}(z) && \text{(Def. von } h\text{)}
\end{aligned}
$$

Bedeutungserhaltung

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Num}_2(h(uz)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)h(z)) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abcd) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)abc) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= (\mathrm{Num}_2(h(u)ab) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \dots \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathrm{num}_2(a) \cdot 8 + \mathrm{num}_2(b) \cdot 4 + \mathrm{num}_2(c) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + ((\mathrm{num}_2(a) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(b)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(c)) \cdot 2 + \mathrm{num}_2(d) \\
&= \mathrm{Num}_2(h(u)) \cdot 16 + \mathrm{Num}_2(abcd) \\
&= \mathrm{Num}_{16}(u) \cdot 16 + \mathrm{Num}_2(h(z)) && \text{(I.V. und Wahl von } abcd\text{)} \\
&= \mathrm{Num}_{16}(u) \cdot 16 + \mathrm{Num}_{16}(z) && \text{(Def. von } h\text{)} \\
&= \mathrm{Num}_{16}(uz) && \text{(Def. von } \mathrm{Num}_{16}\text{).}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Trans}_{2,16}$

Führende Nullen entfernen, aber mindestens eine Ziffer

$$\begin{aligned} \varphi \colon Z_2^* &\to Z_2^*, \\ \epsilon &\mapsto \mathtt{0}, \\ \mathtt{1} \cdot w &\mapsto \mathtt{1} \cdot w, \text{ wobei } w \in Z_2^*, \\ \mathtt{0} \cdot w &\mapsto \varphi(w), \text{ wobei } w \in Z_2^*. \end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{Trans}_{2,16} = \varphi \circ h$

$$\begin{aligned} \mathrm{Trans}_{2,16}(\mathtt{1E5}) &= \varphi(h(\mathtt{1E5})) \\ &= \varphi(h(\mathtt{1}) \cdot h(\mathtt{E}) \cdot h(\mathtt{5})) \\ &= \varphi(\mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{1})) \cdot \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{E})) \cdot \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{5}))) \\ &= \varphi(\mathtt{0001} \cdot \mathtt{1110} \cdot \mathtt{0101}) \\ &= \mathtt{111100101} \end{aligned}$$