Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Binärdarstellung einer Zahl

$$\begin{aligned}\mathrm{Repr}_2(30) &= \mathrm{Repr}_2(30 \ \mathbf{div}\ 2) \cdot \mathrm{repr}_2(30 \ \mathbf{mod}\ 2) \\ &= \mathrm{Repr}_2(15) \cdot \mathrm{repr}_2(0)\end{aligned}$$

Binärdarstellung einer Zahl

$$\begin{aligned}
\mathrm{Repr}_2(30) &= \mathrm{Repr}_2(30 \textbf{ div } 2) \cdot \mathrm{repr}_2(30 \textbf{ mod } 2) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15) \cdot \mathrm{repr}_2(0) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15 \textbf{ div } 2) \cdot \mathrm{repr}_2(15 \textbf{ mod } 2) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{0}
\end{aligned}$$

Binärdarstellung einer Zahl

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Repr}_2(30) &= \mathrm{Repr}_2(30 \textbf{ div } 2) \cdot \mathrm{repr}_2(30 \textbf{ mod } 2) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15) \cdot \mathrm{repr}_2(0) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15 \textbf{ div } 2) \cdot \mathrm{repr}_2(15 \textbf{ mod } 2) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7 \textbf{ div } 2) \cdot \mathrm{repr}_2(7 \textbf{ mod } 2) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(3) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0}
\end{aligned}
$$

Binärdarstellung einer Zahl

$$\begin{aligned}
\mathrm{Repr}_2(30) &= \mathrm{Repr}_2(30 \;\mathbf{div}\; 2) \cdot \mathrm{repr}_2(30 \;\mathbf{mod}\; 2) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15) \cdot \mathrm{repr}_2(0) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15 \;\mathbf{div}\; 2) \cdot \mathrm{repr}_2(15 \;\mathbf{mod}\; 2) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7 \;\mathbf{div}\; 2) \cdot \mathrm{repr}_2(7 \;\mathbf{mod}\; 2) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(3) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(3 \;\mathbf{div}\; 2) \cdot \mathrm{repr}_2(3 \;\mathbf{mod}\; 2) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(1) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0}
\end{aligned}$$

Binärdarstellung einer Zahl

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Repr}_2(30) &= \mathrm{Repr}_2(30 \ \mathbf{div}\ 2) \cdot \mathrm{repr}_2(30 \ \mathbf{mod}\ 2) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15) \cdot \mathrm{repr}_2(0) \\
&= \mathrm{Repr}_2(15 \ \mathbf{div}\ 2) \cdot \mathrm{repr}_2(15 \ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(7 \ \mathbf{div}\ 2) \cdot \mathrm{repr}_2(7 \ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(3) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(3 \ \mathbf{div}\ 2) \cdot \mathrm{repr}_2(3 \ \mathbf{mod}\ 2) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathrm{Repr}_2(1) \cdot \mathrm{repr}_2(1) \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} \\
&= \mathtt{11110}
\end{aligned}
$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\mathrm{Repr}_3(\mathrm{Num}_3(1210) + \mathrm{Num}_3(221))$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & 0 \\
  & 2 & 2 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Nebenrechnung:

$$\mathrm{Repr}_3(\mathrm{num}_3(0) + \mathrm{num}_3(1)) = 1$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\mathrm{Repr}_3(\mathrm{Num}_3(1210) + \mathrm{Num}_3(221))$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 2 & 1 \\ \hline & & & 1 \end{array}$$

Nebenrechnung:

$$\mathrm{Repr}_3(\mathrm{num}_3(1) + \mathrm{num}_3(2)) = 10$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\mathrm{Repr}_3(\mathrm{Num}_3(1210) + \mathrm{Num}_3(221))$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
 & 1 & & \\
\hline
 & & 0 & 1
\end{array}
$$

Nebenrechnung:

$$\mathrm{Repr}_3(\mathrm{num}_3(2) + \mathrm{num}_3(2) + \mathrm{num}_3(1)) = 12$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\text{Repr}_3(\text{Num}_3(1210) + \text{Num}_3(221))$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & 1
\end{array}
$$

Nebenrechnung:

$$\text{Repr}_3(\text{num}_3(1) + \text{num}_3(1)) = 2$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\mathrm{Repr}_3(\mathrm{Num}_3(1210) + \mathrm{Num}_3(221))$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & 0 \\
 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & & \\
\hline
2 & 2 & 0 & 1
\end{array}
$$

Addition in Ternärdarstellung

Berechne $\mathrm{Repr}_3(\mathrm{Num}_3(1210) + \mathrm{Num}_3(221))$

1	2	1	0		48
	2	2	1		25
1	1				
2	2	0	1		73

Beschreibung einer formalen Sprache

$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$

Umgangssprachlich

$$L = \{w \in A^* \mid \text{Nach dem ersten Vorkommen von } \mathtt{c} \text{ in } w \text{ kommt kein } \mathtt{a} \text{ mehr vor}\}$$

Für jedes $w \in L$ gilt:

- $\mathtt{c}$ kommt nicht in w vor oder
- erst kommen beliebig viele $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ in w vor, dann ein $\mathtt{c}$ und danach kein $\mathtt{a}$ mehr.

Formal

$$L = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{c}\}\{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$$

Beweis durch vollständige Induktion über die Wortlänge

A Alphabet

Für jedes $w \in A^*$ sei $\mathcal{A}_w$ eine Aussage

Behauptung: Für jedes $w \in A^*$ gilt $\mathcal{A}_w$

$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$

Umformulierung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Für jedes $w \in A^n$ gilt $\mathcal{A}_w$

Beweis durch vollständige Induktion über n

Ein Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
$L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$
$S = \{w \in A^* \mid \text{es gibt ein } i \in \mathbb{Z}_{|w|} \text{ so, dass } w(i) = \mathtt{b}\}$

Behauptung: $S \subseteq L$
Umformulierung: Für jedes $w \in S$ gilt $w \in L$

Für jedes $w \in A^*$ ist $N_{\mathtt{b}}(w)$ gleich die Anzahl der Vorkommen von $\mathtt{b}$ in w
$S = \{w \in A^* \mid N_{\mathtt{b}}(w) \in \mathbb{N}_+\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \{w \in A^* \mid N_{\mathtt{b}}(w) = k\}$

Umformulierung: Für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ gilt:

Für jedes $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k$ gilt $w \in L$

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.
Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathsf{b}}(w) = k = 1$.

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.
Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k = 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = N_{\mathtt{b}}(v) = 0$ so, dass $u \cdot \mathtt{b} \cdot v = w$.

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.
Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k = 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = N_{\mathtt{b}}(v) = 0$ so, dass $u \cdot \mathtt{b} \cdot v = w$.
Es gilt $u, v \in \{\mathtt{a}\}^*$.

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.
Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k = 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = N_{\mathtt{b}}(v) = 0$ so, dass $u \cdot \mathtt{b} \cdot v = w$.
Es gilt $u, v \in \{\mathtt{a}\}^*$.
Somit gilt $w \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.

Induktionsanfang

Es sei $k = 1$.
Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k = 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = N_{\mathtt{b}}(v) = 0$ so, dass $u \cdot \mathtt{b} \cdot v = w$.
Es gilt $u, v \in \{\mathtt{a}\}^*$.
Somit gilt $w \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
Wegen $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^* \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$ folgt $w \in L$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathsf{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathsf{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathsf{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathsf{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathsf{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathtt{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.
Wie im Induktionsanfang zeigt man $u \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathtt{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.
Wie im Induktionsanfang zeigt man $u \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt
$v \in L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathtt{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.
Wie im Induktionsanfang zeigt man $u \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt
$v \in L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0}(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.
Somit gibt es ein $n \in N_0$ derart, dass $v \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathtt{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.
Wie im Induktionsanfang zeigt man $u \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt
$v \in L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.
Somit gibt es ein $n \in N_0$ derart, dass $v \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.
Folglich gilt
$w = u \cdot v \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^* \cdot (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{n+1}$.

Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } v \in A^* \text{ mit } N_{\mathtt{b}}(v) = k \text{ gilt } v \in L. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(w) = k + 1$.
Dann gibt es $u, v \in A^*$ mit $N_{\mathtt{b}}(u) = 1$ und $N_{\mathtt{b}}(v) = k$ so, dass $u \cdot v = w$.
Wie im Induktionsanfang zeigt man $u \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
Gemäß der Induktionsvoraussetzung gilt
$v \in L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0}(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.
Somit gibt es ein $n \in N_0$ derart, dass $v \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n$.
Folglich gilt
$w = u \cdot v \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^* \cdot (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^n = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{n+1}$.
Wegen $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{n+1} \subseteq L$ folgt $w \in L$.

Induktive Definition einer Abbildung

Für jedes $p\colon Z_{10} \to \mathbb{B}$ sei

$$
\begin{aligned}
\mathrm{filter}_p\colon Z_{10}^* &\to Z_{10}^*, \\
\epsilon &\mapsto \epsilon, \\
z \cdot v &\mapsto \begin{cases} z \cdot \mathrm{filter}_p(v), & \text{falls } p(z) = \mathbf{w}, \\ \mathrm{filter}_p(v), & \text{falls } p(z) = \mathbf{f}, \end{cases} \\
& \quad \text{wobei } z \in Z_{10} \text{ und } v \in Z_{10}^*.
\end{aligned}
$$

$\mathrm{filter}_p(25380)$

Induktive Definition einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{even}\colon Z_{10} &\to \mathbb{B}, \\ z &\mapsto \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } \mathrm{num}_{10}(z) \text{ gerade ist,} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathrm{filter}_{\mathrm{even}}(25380) = 280$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{not}\colon \mathbb{B} &\to \mathbb{B}, \\ \mathbf{w} &\mapsto \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &\mapsto \mathbf{w}, \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{not}\circ\mathrm{even}\colon Z_{10} &\to \mathbb{B}, \\ z &\mapsto \mathrm{not}(\mathrm{even}(z)). \end{aligned}\right.$$

$\mathrm{filter}_{\mathrm{not}\circ\mathrm{even}}(25380) = 53$