Grundbegriffe der Informatik

Übung

Simon Wacker

Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2015/2016

Komposition

Komposition von $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C, \\ a &\mapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

Identität auf D

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\colon D &\to D, \\ d &\mapsto d \end{aligned}$$

$h\colon D \to D$ selbstinvers bezüglich $\circ$

$$h \circ h = \mathrm{id}$$

Boolesche Funktionen

$\mathbb{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Negation

$$
\begin{aligned}
\neg \colon \mathbb{B} &\to \mathbb{B}, \\
\mathbf{w} &\mapsto \mathbf{f}, \\
\mathbf{f} &\mapsto \mathbf{w}
\end{aligned}
$$

selbstinvers $\neg(\neg x) = x$

Boolesche Funktionen

$\mathbb{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Disjunktion

$$\begin{aligned} \vee \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} &\to \mathbb{B}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } \mathbf{w} \in \{x, y\}, \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

kommutativ $x \vee y = y \vee x$

Boolesche Funktionen

$\mathbb{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Konjunktion

$$\begin{aligned} \wedge\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} &\to \mathbb{B}, \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } \mathbf{f} \notin \{x, y\}, \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

kommutativ $x \wedge y = y \wedge x$

Tautologie

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \to (H \to G)$$

Beweis:

Tautologie

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \to (H \to G)$$

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$.

Tautologie

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \rightarrow (H \rightarrow G)$$

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I : Var_{AL} \rightarrow \mathbb{B}$ eine Interpretation.

Tautologie

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \rightarrow (H \rightarrow G)$$

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I\colon Var_{AL} \rightarrow \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \rightarrow (H \rightarrow G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \rightarrow G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Tautologie

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg \mathbf{w} \vee (\neg val_I(H) \vee \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{f} \vee \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$.

Tautologie

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. ...
Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg \mathbf{f} \vee (\neg val_I(H) \vee \mathbf{f}) \\ &= \mathbf{w} \vee \neg val_I(H) \\ &= \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Tautologie

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. ...
Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$. ...

In jedem Fall gilt $val_I(G \to (H \to G)) = \mathbf{w}$. □

Abbildung von Wörtern

A Alphabet

$$
\begin{aligned}
f: A^* &\to A^*, \\
w &\mapsto w^{|w|^{|A|-1}}
\end{aligned}
$$

Es sei $w \in A^*$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Lemma aus Vorlesung:

$$|w^n| = n \cdot |w| = |w| \cdot n$$

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
|f(w)| &= |w^{|w|^{|A|-1}}| \\
&= |w| \cdot |w|^{|A|-1} \\
&= |w|^{|A|}
\end{aligned}
$$

Abbildung von formalen Sprachen

A Alphabet

$$\xi : 2^{A^*} \to 2^{A^*},$$
$$L \mapsto \{w \in A^* \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ so , dass } w \cdot a \in L\}$$

Es sei $L \in 2^{A^*}$. Für jedes $w \in \xi(L)$ gilt:

$$\text{Es gibt ein } u \in L \setminus \{\epsilon\} \text{ so, dass } |u| = |w| + 1$$

Und für jedes $u \in L \setminus \{\epsilon\}$ gilt:

$$\text{Es gibt ein } w \in \xi(L) \text{ so, dass } |w| = |u| - 1$$

Somit gilt:

$$\Big\{|w| \;\Big|\; w \in \xi(L)\Big\} = \Big\{|u| - 1 \;\Big|\; u \in L \setminus \{\epsilon\}\Big\}$$

Vollständige Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{A}_n$ eine boolesche Aussage.

Weiter sei $M = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$.

Alle Aussagen $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind genau dann wahr, wenn $M = \mathbb{N}_0$ gilt.

Dazu genügt es zu zeigen:

Induktionsanfang: $0 \in M$;
Induktionsschritt: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } n \in M, \text{ dann } n + 1 \in M.$$

Vollständige Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{A}_n$ eine boolesche Aussage.

Weiter sei $M = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathcal{A}_n \text{ ist wahr}\}$.

Alle Aussagen $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind genau dann wahr, wenn $M = \mathbb{N}_0$ gilt.

Dazu genügt es zu zeigen:

Induktionsanfang: $\mathcal{A}_0$ ist wahr;

Induktionsschritt: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Wenn $\mathcal{A}_n$ wahr ist, dann ist $\mathcal{A}_{n+1}$ wahr.

Induktionsschritt

Zu zeigen: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } \mathcal{A}_n \text{ wahr ist, dann ist } \mathcal{A}_{n+1} \text{ wahr.} \qquad (*)$$

Beweisschema 1: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.

Fall 1: $\mathcal{A}_n$ ist falsch. Dann gilt $(*)$.
Fall 2: $\mathcal{A}_n$ ist wahr. Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr.

Nur in Fall 2 ist etwas zu zeigen!

Beweisschema 2: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\mathcal{A}_n \text{ ist wahr.} \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Zu zeigen: $\mathcal{A}_{n+1}$ ist wahr.

Ein kleiner induktiver Beweis (1)

A Alphabet

Behauptung: Für jedes $w \in A^*$, jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$w^n \cdot w^k = w^{n+k}.$$

Beweis: Es sei $w \in A^*$ und es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Nun ist zu zeigen

$$\text{Für jedes } k \in \mathbb{N}_0 : w^n \cdot w^k = w^{n+k}.$$

Diesen Beweis führen wir durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$.

Ein kleiner induktiver Beweis (2)

Induktionsanfang: Es sei $k = 0$. Dann gilt

$$w^n \cdot w^k = w^n \cdot \epsilon = w^n = w^{n+k}.$$

Induktionsschritt: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$w^n \cdot w^k = w^{n+k}. \quad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
w^n \cdot w^{k+1} &= w^n \cdot (w^k \cdot w) && \text{Definition} \\
&= (w^n \cdot w^k) \cdot w && \text{Assoziativität} \\
&= w^{n+k} \cdot w && \text{Induktionsvoraussetz} \\
&= w^{(n+k)+1} && \text{Definition} \\
&= w^{n+(k+1)}. && \text{Assoziativität}
\end{aligned}$$

Faltung

Für jedes $f\colon \mathbb{N}_0 \times A \to \mathbb{N}_0$ definieren wir induktiv

$$\begin{aligned} \mathrm{fold}_f\colon \mathbb{N}_0 \times A^* &\to \mathbb{N}_0, \\ (n, \epsilon) &\mapsto n, \\ (n, w \cdot a) &\mapsto f(\mathrm{fold}_f(n, w), a), \text{ wobei } w \in A^* \text{ und } a \in A. \end{aligned}$$

Für jedes $x \in A$ definieren wir

$$\begin{aligned} f_x\colon \mathbb{N}_0 \times A &\to \mathbb{N}_0, \\ (n, a) &\mapsto \begin{cases} n + 1, & \text{falls } a = x, \\ n, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_x\colon A^* &\to \mathbb{N}_0, \\ w &\mapsto \mathrm{fold}_{f_x}(0, w). \end{aligned}$$

Beispiel

$$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$$

$$\begin{aligned}
N_{\mathtt{s}}(\mathtt{tssts}) &= \mathrm{fold}_{f_{\mathtt{s}}}(0, \mathtt{tssts}) \\
&= \mathrm{fold}_{f_{\mathtt{s}}}(0, \mathtt{tsst} \cdot \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(\mathrm{fold}_{f_{\mathtt{s}}}(0, \mathtt{tsst}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(\mathrm{fold}_{f_{\mathtt{s}}}(0, \mathtt{tss} \cdot \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(\mathrm{fold}_{f_{\mathtt{s}}}(0, \mathtt{tss}), \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(0, \mathtt{t}), \mathtt{s}), \mathtt{s}), \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(0, \mathtt{s}), \mathtt{s}), \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(1, \mathtt{s}), \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(f_{\mathtt{s}}(2, \mathtt{t}), \mathtt{s}) \\
&= f_{\mathtt{s}}(2, \mathtt{s}) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\texttt{s}, \texttt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\texttt{s}}(w) + N_{\texttt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Es sei $w \in A^0$.

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\texttt{s}, \texttt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\texttt{s}}(w) + N_{\texttt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Es sei $w \in A^0$. Dann gilt $w = \epsilon$ und $|w| = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n: N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Es sei $w \in A^0$. Dann gilt $w = \epsilon$ und $|w| = 0$. Für jedes $x \in A$ gilt

$$N_x(\epsilon) = \text{fold}_{f_x}(0, \epsilon) = 0.$$

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Es sei $w \in A^0$. Dann gilt $w = \epsilon$ und $|w| = 0$. Für jedes $x \in A$ gilt

$$N_x(\epsilon) = \text{fold}_{f_x}(0, \epsilon) = 0.$$

Demnach gilt

$$N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = 0 + 0 = 0 = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n: N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n: N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \qquad \text{(I.V.)}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n: N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \tag{I.V.}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n : N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $u \in A^n$ und ein $a \in A$ so, dass $u \cdot a = w$.

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n: N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $u \in A^n$ und ein $a \in A$ so, dass $u \cdot a = w$. Für jedes $x \in A$ gilt nach Definition von N_x, fold_{f_x}, f_x:

$$\begin{aligned} N_x(w) &= \mathrm{fold}_{f_x}(0, u \cdot a) \\ &= f_x(\mathrm{fold}_{f_x}(0, u), a) \\ &= f_x(N_x(u), a) \\ &= \begin{cases} N_x(u) + 1, & \text{falls } a = x, \\ N_x(u), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n : N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $u \in A^n$ und ein $a \in A$ so, dass $u \cdot a = w$. Für jedes $x \in A$ gilt nach Definition von N_x, fold_{f_x}, f_x:

$$N_x(w) = \begin{cases} N_x(u) + 1, & \text{falls } a = x, \\ N_x(u), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n : N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) = |u|. \qquad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $u \in A^n$ und ein $a \in A$ so, dass $u \cdot a = w$. Für jedes $x \in A$ gilt nach Definition von N_x, fold_{f_x}, f_x:

$$N_x(w) = \begin{cases} N_x(u) + 1, & \text{falls } a = x, \\ N_x(u), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich gilt

$$N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = \left.\begin{cases} N_{\mathtt{s}}(u) + 1, & \text{falls } a = \mathtt{s}, \\ N_{\mathtt{s}}(u), & \text{falls } a = \mathtt{t}, \end{cases}\right\} + \left.\begin{cases} N_{\mathtt{t}}(u) + 1, & \text{falls } a = \mathtt{t}, \\ N_{\mathtt{t}}(u), & \text{falls } a = \mathtt{s}, \end{cases}\right\}$$

$$= N_{\mathtt{s}}(u) + N_{\mathtt{t}}(u) + 1 = |u| + 1 = |w|. \quad \square$$

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Beweis durch vollständige Induktion

$A = \{\mathtt{s}, \mathtt{t}\}$

Behauptung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\text{Für jedes } w \in A^n : N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|.$$

Folgerung: Für jedes $w \in A^*$ gilt $N_{\mathtt{s}}(w) + N_{\mathtt{t}}(w) = |w|$.

Beweis: Folgt wegen $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ unmittelbar aus der Behauptung.