

Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

6. März 2021

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein 1. Versuch 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte sehr gut lesbar ausfüllen:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	6	6	7	5	6	7
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44
------------------	------

Note:	
-------	--

/ 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 4 = 7 Punkte)

/ 1

a) Es seien $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ beliebige Funktionen.

Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $f \cdot g \in O(f)$ ist, dann ist $g \in O(1)$.

/ 1

b) $G = (V, E)$ sei der Graph mit $V = \mathbb{Z}_4$ und

$$E = \{(x, y) \in V \times V \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : x + y = 3k\}.$$

Geben Sie die Adjazenzmatrix A und Wegematrix W von G explizit an. Kennzeichnen Sie deutlich, welche Matrix A ist und welche W .

/ 1

c) Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, X, P)$ mit $N = \{X, Y\}$, $T = \{a, b\}$ und $P = \{X \rightarrow Yab, Y \rightarrow \varepsilon\}$.

Geben Sie Produktionen p_1 und p_2 an, sodass die Grammatik $G' = (N, T, X, P')$ mit $P' = P \cup \{p_1, p_2\}$ die Sprache $L(G') = \{a\}^* \cdot \{ab\}^+$ erzeugt.

/ 4

d) Wählen Sie sich zwei der folgenden Fragen aus und beantworten Sie sie:

1. Es sei $L_1 = \langle aa(b)^* \rangle$ und $L_2 = \langle (aa(bb)^*)^* \rangle$. Gibt es einen regulären Ausdruck R , sodass die durch R beschriebene formale Sprache gleich $L_1 \cap L_2$ (also $\langle R \rangle = L_1 \cap L_2$) ist?

Falls ja, geben Sie einen solchen regulären Ausdruck R an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.

2. Es sei R ein zweistelliges Relationssymbol und die prädikatenlogischen Formeln

$$F = \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \quad \text{und} \quad G = \exists y \forall x (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

seien gegeben.

Zeigen oder widerlegen Sie: F und G sind logisch äquivalent.

3. Es seien $f, g, h: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ beliebige Funktionen gegeben, für die $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ gilt.

Zeigen oder widerlegen Sie: $h \in \Omega(f)$.

Ich beantworte Fragen und .

Lösung 1

a) Die Aussage ist **falsch**:

Es sei $f(n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f(n)g(n) = 0 \in O(f(n))$, egal ob $g \in O(1)$ ist oder nicht.

b) Der Übersicht halber ist G der folgende Graph:



Dann haben wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $p_1 = X \rightarrow Xab$ und $p_2 = Y \rightarrow aY$

d) 1. Ja, z. B. $R = aa(bb)^*$.

2. Nein, weil z. B. die Interpretation (D, I) mit $D = \mathbb{N}_0$ und $I(R) = \geq$ zwar Modell von F ist aber nicht von G .

3. Die Behauptung ist **richtig**:

Weil $f \in O(g)$, so gibt es $c_1 \in \mathbb{R}_+$ und $n_1 \in \mathbb{N}_0$, sodass für jedes $n \geq n_1$ gilt: $f(n) \leq c_1 g(n)$.

Analog gibt es $c_2 \in \mathbb{R}_+$ und $n_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass für jedes $n \geq n_2$ gilt: $g(n) \leq c_2 h(n)$.

Weil c_1 und c_2 positiv sind, so existieren $\frac{1}{c_1}$ und $\frac{1}{c_2}$ und damit auch $c = \frac{1}{c_1 c_2}$.

Dann gilt für $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ und jedes $n \geq n_0$: $h(n) \geq cf(n)$.

Es folgt also $h \in \Omega(f)$.

Alternativer Beweis. Wegen $f \in O(g)$ bzw. $g \in O(h)$ gilt $f \preceq g$ bzw. $g \preceq h$. Weil die Relation \preceq transitiv ist, so folgt $f \preceq h$. Nach der Rechenregel aus der Vorlesung ist das zu $h \succeq f$ äquivalent, womit $h \in \Omega(f)$ folgt.

/ 6

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es seien A und B Alphabete und $h: A^* \rightarrow B^*$ ein Homomorphismus.

/ 1

- a) Es sei $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{0, 1\}$. Es gibt nur endlich viele Homomorphismen $h: A^* \rightarrow B^*$, für die $h(abc) = 01$ ist.
- (i) Warum sind es nur endlich viele?
 - (ii) Wie viele genau gibt es? (Es reicht, eine Zahl anzugeben.)

Es seien A , B und h beliebig.

/ 1

- b) Zeigen Sie: $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

Für die beiden letzten Teilaufgaben beschränken wir uns auf Homomorphismen h , die *bijektiv* sind.

/ 2

- c) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in A$ gilt: $|h(x)| = 1$.

Tipp. Weil h bijektiv ist, folgt aus Teilaufgabe b): $h(x) \neq \varepsilon$. Sie können damit davon ausgehen, dass es $y \in B$ und $w \in B^*$ mit $h(x) = yw$ gibt.

/ 2

- d) Zeigen Sie, dass $|A| = |B|$ ist.

Hinweis. Sie dürfen hierzu die Aussage von Teilaufgabe c) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Lösung 2

- a) (i) Der Homomorphismus h ist eindeutig durch die Werte von $h(a)$, $h(b)$ und $h(c)$ festgelegt. Weil es nur endlich viele solche Werte gibt, die $h(a)h(b)h(c) = h(abc) = 01$ erfüllen, so muss die Anzahl der h mit dieser Eigenschaft ebenfalls endlich sein.

(ii) 6

- b) Es gilt $h(\varepsilon) = h(\varepsilon \cdot \varepsilon) = h(\varepsilon)h(\varepsilon)$.

Damit gilt insbesondere $|h(\varepsilon)| = |h(\varepsilon)h(\varepsilon)| = 2|h(\varepsilon)|$.

Daraus folgt, dass $|h(\varepsilon)| = 0$.

Es gibt genau ein Wort der Länge 0, nämlich ε , also folgt $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

- c) Es sei $x \in A$. Weil h bijektiv ist, so ist $h(x) \neq \varepsilon$. Damit gibt es $y \in B$ und $w \in B^*$ mit $h(x) = yw$.

Es seien $z_1, z_2 \in A^*$ mit $h(z_1) = y$ und $h(z_2) = w$. (Solche z_1 und z_2 existieren, weil h bijektiv ist.)

Wegen h bijektiv gilt wieder $z_1 \neq \varepsilon$ sowie $x = z_1z_2$.

Weil $|x| = 1$ ist, so folgt also $z_2 = \varepsilon$ und $x = z_1$.

Damit ist $|h(x)| = |h(z_1)| = |y| = 1$.

Alternativer Lösungsweg: Es sei $h(x) = w$. Wie oben ist $w \neq \varepsilon$. Da h surjektiv ist, gibt es für jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ ein $x_i \in A^*$ mit $h(x_i) = w(i)$ und nach Teilaufgabe b) ist $x_i \neq \varepsilon$. Da h injektiv ist, so gilt $|x| = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{|w|}} |x_i|$ und, weil $|x_i| > 0$ für jedes i ist, muss also $|w| = 1$ sein.

- d) Nach Teilaufgabe c) und weil h bijektiv ist, so gilt $|A| \leq |B|$. Wir zeigen also $|A| \geq |B|$.

Hierzu reicht es zu zeigen, dass für jedes $y \in B$ das eindeutige $x \in A^*$ mit $h(x) = y$ in A sein muss, das heißt, $x \in A$ ist.

Weil h bijektiv ist, so ist $x \neq \varepsilon$.

Es seien also $z_1 \in A$ und $z_2 \in A^*$ mit $x = z_1z_2$.

Es gilt also $1 = |y| = |h(x)| = |h(z_1)h(z_2)|$. Wegen $z_1 \in A$ und Teilaufgabe c) gilt $|h(z_1)| = 1$, womit also $|h(z_2)| = 0$, sprich $h(z_2) = \varepsilon$ folgt.

Mit der Injektivität von h gilt $z_2 = \varepsilon$.

Schließlich gilt $x = z_1z_2 = z_1 \in A$, was zu zeigen war.

/ 6

Aufgabe 3 (1 + 3 + 2 = 6 Punkte)

/ 1

- a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein ungerichteter Graph G schlingenfrei und zusammenhängend ist, dann muss G ein Baum sein.

Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

/ 3

- b) Für $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ sei der Homomorphismus $H: A^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ wie folgt festgelegt:

$$H(a) = 00$$

$$H(b) = 01$$

$$H(c) = 100$$

$$H(d) = 101$$

$$H(e) = 110$$

$$H(f) = 111$$

Zeichnen Sie einen Huffman-Baum zu einem Wort $w \in A^*$, der H als Codierung ergibt. Geben Sie w explizit an.

/ 2

- c) Huffman-Bäume sind keine graphentheoretische sondern eine Art verallgemeinerter Bäume. Nennen Sie zwei weitere Arten von solchen verallgemeinerten Bäumen, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Wählen Sie anschließend eine davon aus und beschreiben Sie, was dadurch dargestellt wird bzw. wofür diese Art Baum in der Informatik angewandt wird.

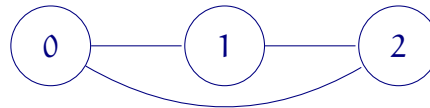
Art 1:

Art 2:

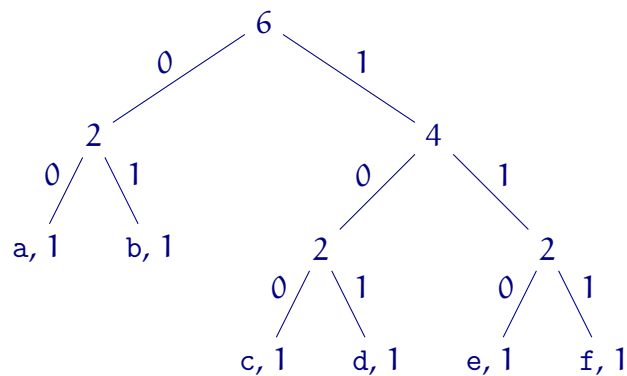
Ich beschreibe Art:

Lösung 3

- a) Nein, weil z. B. der folgende ungerichtete Graph kein Baum ist, obwohl es schlingenfrei und zusammenhängend ist:



- b) Z. B. $w = abcdef$:



- c) 1. Ein Ableitungsbaum ist eine bildliche Darstellung einer Folge von Ableitungen einer Grammatik, die ein bestimmtes Wort erzeugen. Dabei kann man genau nachverfolgen, wie jedes Zeichen aus dem Wort entstanden ist.
2. Ein Kantorowitsch-Baum ist eine kompakte strukturelle Darstellung eines regulären Ausdrucks. Er kann z. B. angewandt werden, um Beweise über reguläre Ausdrücke durch strukturelle Induktion zu führen.

/ 7

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte)

/ 1

a) Geben Sie $\text{Repr}_b(42)$ für $b = 2$ und $b = 3$ an.

/ 1

b) Geben Sie $\text{Num}_b(10110)$ für $b = 2$ und $b = 3$ an.

Wir betrachten jetzt die folgende Sprache:

$$L = \{w \in \{0,1\}^+ \mid \text{Num}_2(w) \bmod 2 = 0 \text{ oder } (\text{Num}_2(w) \text{ div } 2) \bmod 2 = 1\}.$$

/ 1

c) Geben Sie alle Wörter aus L an, die Länge 3 haben.

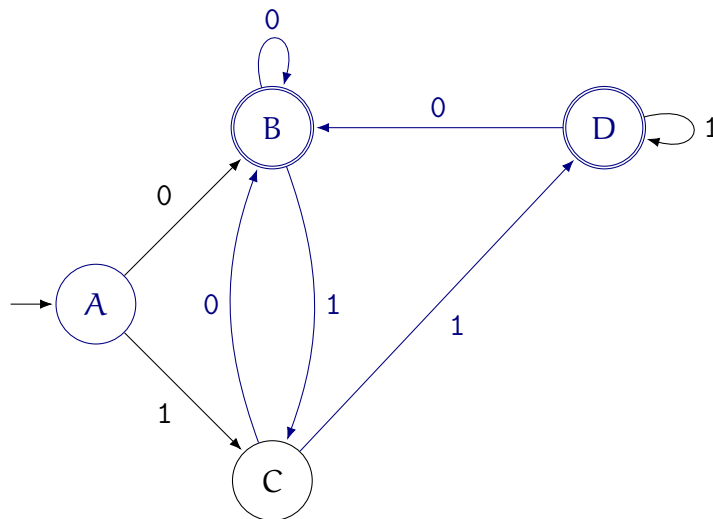
/ 1

d) Geben Sie eine Grammatik G mit höchstens 2 Nichtterminalsymbolen an, für die $L(G) = L$ ist. Auf der rechten Seite jeder Produktion darf dabei höchstens *ein* Nichtterminalsymbol vorkommen.

/ 3

e) Vervollständigen Sie den folgenden endlichen Akzeptor A , sodass $L(A) = L$ ist.

Sie dürfen dabei höchstens einen zusätzlichen Zustand verwenden. Die Zustände A, B, C und D dürfen Sie noch als akzeptierend kennzeichnen.



Lösung 4

a) $\text{Repr}_2(42) = 101010$, $\text{Repr}_3(42) = 1120$

b) $\text{Num}_2(10110) = 22$, $\text{Num}_3(10110) = 93$

c) 000, 010, 011, 100, 110, 111

d) $G = (N, T, X, P)$ mit $N = \{X\}$, $T = \{0, 1\}$ und $P = \{X \rightarrow 0X \mid 1X \mid 0 \mid 11\}$

/ 5

Aufgabe 5 (1 + 1 + 2 + 1 = 5 Punkte)

/ 1

a) Wann heißt eine aussagenlogische Formel F unerfüllbar?Es seien F , G und H aussagenlogische Formeln.

Ein Student, der sich noch nicht gut mit Aussagenlogik auskennt, hat die Formel $F \rightarrow (G \vee \neg H)$ in fünf Schritten U_1 , U_2 , U_3 , U_4 und U_5 umgeformt. Der Student ist so vorgegangen:

$$\begin{aligned}
 F \rightarrow (G \vee \neg H) &\xrightarrow{U_1} \neg F \vee G \vee \neg H \xrightarrow{U_2} \neg G \rightarrow (F \wedge H) \xrightarrow{U_3} G \rightarrow \neg(F \wedge H) \\
 G \rightarrow \neg(F \wedge H) &\xrightarrow{U_4} G \rightarrow (F \rightarrow \neg H) \xrightarrow{U_5} (G \rightarrow F) \rightarrow \neg H
 \end{aligned}$$

Leider hat der Student nicht auf die Semantik geachtet. Bei manchen Umformungen ist die entstehende Formel im Allgemeinen *nicht* logisch äquivalent zur vorangehenden.

/ 1

b) Bei welchen der fünf Umformungen ist die entstehende Formel im Allgemeinen *nicht* logisch äquivalent zur vorangehenden?

/ 2

c) Geben Sie für jeden der in Teilaufgabe b) genannten Fälle jeweils explizite Formeln F , G und H an, bei denen die neu entstehende Formel nicht logisch äquivalent zur vorangehenden ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass das Alphabet aussagenlogischer Variablen $Var_{AL} = \{P, Q, R\}$ ist. Es genügt, jeweils die Formeln aufzuschreiben; Begründungen sind nicht erforderlich.

/ 1

d) Kann man immer noch Gegenbeispiele für die in Teilaufgabe c) genannten Fälle finden, wenn $Var_{AL} = \{P\}$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.**Lösung 5**a) Wenn für jede Interpretation I gilt: $val_I(F) = f$.b) U_2 , U_3 und U_5 c) U_2 : $F = H = P$ und $G = P \wedge \neg P$ U_3 : $F = G = H = P$ U_5 : $G = P \wedge \neg P$, $H = P \vee \neg P$ und F beliebig

d) Ja, siehe c).

/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ definieren wir einen endlichen Automaten A_n wie folgt:

- die Zustandsmenge ist $Q_n = \mathbb{Z}_n \cup \{-1\}$
- der Startzustand ist 0
- das Eingabealphabet ist \mathbb{Z}_n
- die Zustandsüberföhrungsfunktion $f: Q_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow Q_n$ ist für jedes $z \in Q_n$ und jedes $x \in \mathbb{Z}_n$ wie folgt festgelegt:

$$f(z, x) = \begin{cases} z + 1, & z = x \text{ und } z < n - 1 \\ z, & z = x \text{ und } z = n - 1 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- die Menge akzeptierender Zustände ist $F_n = \{n - 1\}$

/ 2

a) Zeichnen Sie A_1 , A_2 und A_3 .

/ 1

b) Geben Sie jedes $w \in L(A_4)$ an, für das gilt: $\forall w' \in L(A_4) : |w'| \geq |w|$.

/ 2

c) Nachfolgend sind vier formale Sprachen L_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definiert:

- (i) $L_1 = L(A_2) \cup L(A_3)$ (ii) $L_2 = L(A_2) \cap L(A_3)$
(iii) $L_3 = L(A_3) \setminus L(A_2)$ (iv) $L_4 = L(A_2) \setminus L(A_3)$

Geben Sie für jedes L_i einen formalen Mengenausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür *ausschließlich* folgende Zeichen:

0 1 2 { } () , * · U ε

/ 1

d) Es sei $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{Z}_n$, $k \neq n - 1$.

Angenommen, $B_n(k)$ ist derselbe Automat wie A_n , aber die Menge akzeptierender Zustände von $B_n(k)$ ist gleich $F'_n = \{k, n - 1\}$.

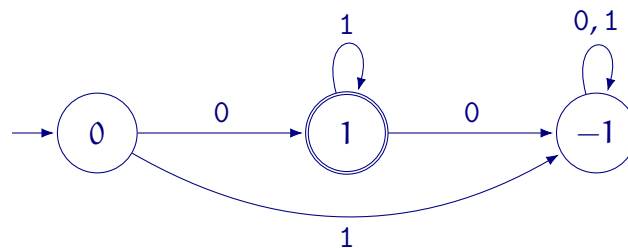
Geben Sie $L(B_n(k)) \setminus L(A_n)$ und $L(A_n) \setminus L(B_n(k))$ präzise an.

Lösung 6

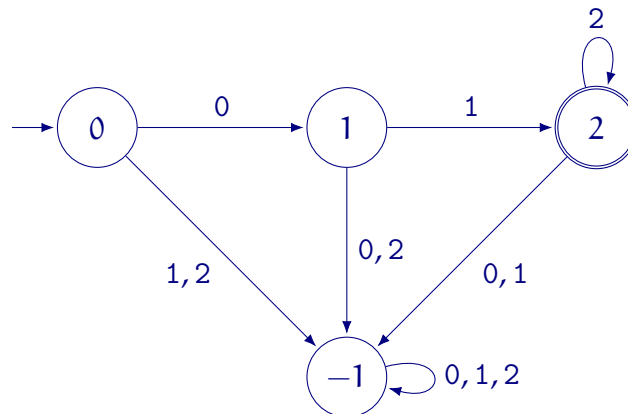
a) A_1 :



A_2 :



A_3 :



b) 012

c) (i) $L_1 = \{0\}1^* \cup \{01\}2^*$

(ii) $L_2 = \{01\}$

(iii) $L_3 = \{012\}2^*$

(iv) $L_4 = \{0\} \cup \{011\}1^*$

- d)
- $L(B_n(k)) \setminus L(A_n) = \{w_k\}$, wobei $w_k \in \mathbb{Z}_n^*$ das Wort der Länge k mit $w_k(i) = i$ für jedes $i \in \mathbb{Z}_k$ ist.
Das ist auch im Fall $k = 0$ korrekt.
 - $L(A_n) \setminus L(B_n(k)) = \emptyset$

/ 7

Aufgabe 7 (1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7 Punkte)

Es sei T eine Turingmaschine mit Zustandsmenge Z , Anfangszustand $z_0 \in Z$, Bandalphabet X , Eingabealphabet $A \subseteq X \setminus \{\square\}$, Zustandsüberföhrungsfunktion $f: Z \times X \rightarrow Z$, Ausgabefunktion $g: Z \times X \rightarrow X$ und Bewegungsfunktion $m: Z \times X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

/ 1

- a) In der Vorlesung haben wir eine Konfiguration von T als ein Tripel $(z, b, p) \in Z \times X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ definiert. Was wird durch z , b und p jeweils repräsentiert?

Wie in der Vorlesung bezeichnen wir als Abkürzung mit $\mathcal{C}_T = Z \times X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ die Menge aller Konfigurationen von T .

/ 1

- b) Es sei $c = (z, b, p) \in \mathcal{C}_T$ die aktuelle Konfiguration von T . Wann existiert eine Nachfolgekongfiguration $c' = (z', b', p') \in \mathcal{C}_T$?

/ 1

- c) Wann sagt man, dass $c \in \mathcal{C}_T$ eine Endkonfiguration ist?

/ 3

- d) Zeigen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion über n :
Es sei $c \in \mathcal{C}_T$ beliebig. Dann gibt es höchstens ein $c' \in \mathcal{C}_T$, sodass T von c ausgehend die Konfiguration c' in genau $n \in \mathbb{N}_0$ Schritten erreicht.

/ 1

- e) Zeigen Sie die folgende Aussage:
Zu jedem Eingabewort $w \in A^*$ kann es höchstens eine Endkonfiguration geben, die T ausgehend von der Anfangskonfiguration für w erreicht.

Hinweis. Sie dürfen hierzu die Aussage von Teilaufgabe d) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Lösung 7

- a) z ist der aktuelle Zustand, b die Beschriftung des (gesamten) Bandes und p die aktuelle Position des Kopfes.
- b) wenn für $(z, b(p))$ die Funktionen f , g und m definiert sind
- c) wenn es keine Nachfolgekongfiguration zu c existiert
- d) Es sei $c \in \mathcal{C}_T$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir im Folgenden $C(n)$ für die Menge aller $c' \in \mathcal{C}_T$, die T von c ausgehend in genau n Schritten erreicht.

IA: Es gibt genau eine Konfiguration $c' \in C(0)$, die in $n = 0$ Schritten erreicht wird, nämlich $c' = c$.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte die

IV: $|C(n)| \leq 1$.

Wenn $C(n+1) = \emptyset$ ist, dann ist die Behauptung trivial, also sei $c'' \in C(n+1)$.

Weil c'' in $n+1$ Schritten erreicht wird, muss es eine Konfiguration $c' \in C(n)$ geben, für die c'' Nachfolgekongfiguration ist.

Die IV besagt, dass c' eindeutig ist.

Weil f , g und m alle rechtseindeutig sind, so muss damit auch c'' eindeutig sein.

- e) Es sei $w \in A^*$. Wenn es keine Endkongfiguration zu w gibt, dann ist die Behauptung trivial. Es bleibt zu zeigen: Wenn eine Endkongfiguration $e \in \mathcal{C}_T$ zu w existiert, dann ist sie eindeutig.

Es sei $e \in \mathcal{C}_T$ eine beliebige Endkongfiguration und $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $e \in C(n)$ ist. Nach d) wissen wir, dass $C(n) = \{e\}$ gilt. Wenn es ein $c \in C(n+1)$ gäbe, dann müsste es also die Nachfolgekongfiguration zu e sein; da e aber eine Endkongfiguration ist, so kann das nicht der Fall sein. Weil e die einzige Konfiguration in $C(n)$ ist, gilt damit für jedes $m > n$: $C(m) = \emptyset$.

Es sei jetzt $e' \in \mathcal{C}_T$ eine weitere Endkongfiguration und $n' \in \mathbb{N}_0$ so, dass $C(n') = \{e'\}$ ist. Weil $C(n) \neq \emptyset$, so gilt $n \leq n'$; analog gilt wegen $C(n') \neq \emptyset$, dass $n' \leq n$ ist. Folglich ist $n = n'$ und $e = e'$.

Es folgt, dass e eine eindeutige Endkongfiguration ist.