

# Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium Nr.:  Tutor\*in:

Ausgabe: 10. Januar 2020

Abgabe: 21. Januar 2020, 12:30 Uhr  
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss  
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 11:  / 21

Blätter 7 – 11:  / 101

---

**Hinweis:** Auf den Aufgabenblättern 7 bis 12 wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn in diesem zweiten Teil mindestens 60 Punkte erreicht werden. Es *kann* sein (muss aber nicht), dass am Ende die Punktegrenze etwas gesenkt wird.

**Aufgabe 11.1 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)**

Es seien beliebige Funktionen  $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_+$  gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

- a) Wenn  $\log f(n) \asymp g(n)$ , dann  $f(n) \asymp 2^{g(n)}$ .
- b) Wenn  $f(n) \asymp 2^{g(n)}$  und  $g(n) \asymp 1$ , dann  $\log f(n) \asymp g(n)$ .

*Hinweis.* Mit „log“ ist der Logarithmus zur Basis 2 gemeint.

**Aufgabe 11.2 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**

Für Funktionen  $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  sei  $f(n)^{O(g(n))}$  die Menge der Abbildungen  $h: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $h(n) = f(n)^{k(n)}$  für ein  $k \in O(g)$ . Gehen Sie für diese Aufgabe davon aus, dass  $0^0 = 1$  ist.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie immer gelten oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

- a)  $n + O(n) = O(n + n)$
- b)  $O(n^1) = n^{O(1)}$
- c)  $O(2^n) = 2^{O(n)}$

**Aufgabe 11.3 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)**

In dieser Aufgabe haben alle Funktionen als Zielbereich (nur) die Menge  $\mathbb{R}_+$  der *positiven* reellen Zahlen. Eine Funktion  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt *monoton wachsend*, wenn  $f(n) \geq f(n')$  für  $n > n'$  ist. Zudem heißt  $f$  *streng monoton wachsend*, wenn  $f(n) > f(n')$  für  $n > n'$  ist.

- a) Zeigen Sie: Wenn  $f$  monoton wachsend ist, dann gilt  $f \in \Omega(1)$ .
- b) Geben Sie eine Funktion  $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $g \in \Omega(1)$  an, die nicht monoton wachsend ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Zeigen Sie: Wenn  $f$  streng monoton wachsend und  $f(n) \in \mathbb{N}_+$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  ist, dann gilt  $f \in \Omega(n)$ .

*Tipp.* Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass  $f(n) \geq n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  ist.

**Aufgabe 11.4 (0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte)**

Es sei  $A = \{0, 1\}$ . Ferner sei für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  der gerichtete Graph  $T_n = (V_n, E_n)$  mit  $V_n = \{w \in A^* \mid |w| \leq n\}$  gegeben, wobei  $E_n$  wie folgt rekursiv festgelegt ist:

$$E_0 = \emptyset \quad \text{und} \quad E_{n+1} = E_n \cup \{(w, wx) \mid w \in A^n, x \in A\}$$

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen  $f_i: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  jeweils ein  $g_i: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  an, das dazu asymptotisch gleich schnell wächst (d. h., für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  gilt jeweils  $f_i \asymp g_i$ ). Für die  $g_i$  dürfen Sie nur Konstanten, die Grundrechenarten, Logarithmen, und Exponentialfunktionen und deren Kompositionen verwenden. Die Variable soll  $n$  heißen.

- a)  $f_1: n \mapsto \min\{d(v) \mid v \in V_n\}$
- b)  $f_2: n \mapsto \max\{d(v) \mid v \in V_n\}$
- c)  $f_3: n \mapsto |\{v \in V_n \mid d^+(v) = 0\}|$
- d)  $f_4: n \mapsto \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \exists x, y \in V_n : (x, y) \in E_n^i\}$

**Aufgabe 11.5 (4 Punkte)**

Es sei  $a = 2$ ,  $b = 8$ ,  $c \geq 0$  und  $T: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  rekursiv wie folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  definiert:

$$T(0) = 0, \quad T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + n^c$$

Geben Sie die asymptotische Abschätzung, die das Master-Theorem für  $T(n)$  liefert, in Abhängigkeit von  $c$  an. Begründen Sie Ihre Antwort. Rechtfertigen Sie, warum gegebenenfalls die zusätzlichen Voraussetzungen im 3. Fall des Master-Theorems erfüllt sind.