

Grundbegriffe der Informatik

Lösungsvorschläge Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 15. Januar 2014

Abgabe: 24. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11: / 20

Blätter 1 – 11: / 200

Für Aufgaben zu endlichen Automaten gilt generell: Falls Sie Bilder zeichnen, achten Sie darauf, dass erkennbar ist, welche Kante wie beschriftet ist. Für Automaten mit absurd vielen Zuständen gibt es Punktabzug. Was „absurd viel“ ist, hängt von der Aufgabenstellung ab.

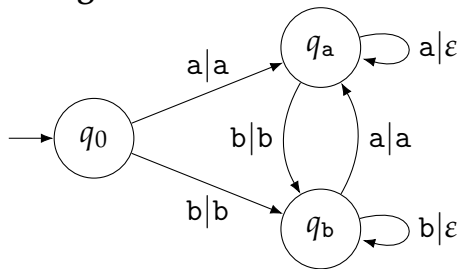
Aufgabe 11.1 (3 Punkte)

Für das Alphabet $X = \{a, b\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei die „Symbolwechsel-Faktorisierung“ (v_0, v_1, \dots, v_k) wie folgt definiert:

- $w = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_k$
- $\forall 0 \leq i \leq k: v_i \in \{x\}^+$ für ein $x \in X$
- $\forall 0 \leq i < k: v_i(0) \neq v_{i+1}(0)$
(Erinnerung: $v(0)$ ist das erste Symbol von v .)

Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet X , Ausgabealphabet $Y = X$ an, der jede Eingabe $w \in X^+$ übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = v_0(0) \cdot v_1(0) \cdot \dots \cdot v_k(0)$.

Lösung 11.1



Aufgabe 11.2 (3+1=4 Punkte)

Für das Alphabet $X = \{a, b\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei $T(w) \in X^*$ wie folgt definiert:

$$T(\varepsilon) = \varepsilon$$

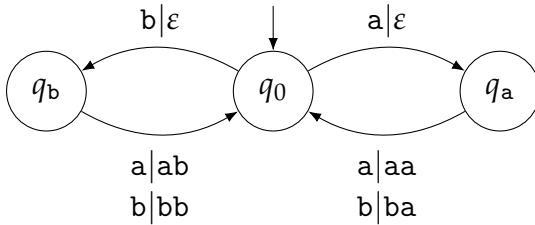
$$\forall x \in X: T(x) = x$$

$$\forall x, y \in X: \forall w \in X^*: T(xyw) = yxT(w)$$

- a) Geben Sie einen Mealy-Automaten mit Eingabealphabet X , Ausgabealphabet $Y = X$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in X^+$ gerader Länge übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = T(w)$. Was der Automat für Eingaben ungerader Länge ausgibt, ist gleichgültig.
- b) Definieren Sie eine Funktion S , die angibt, welche Ausgaben Ihr Automat aus Teilaufgabe a) für Eingaben beliebiger Länge produziert. Nehmen Sie bei der Definition von S *nicht* Bezug auf den Automaten; die Antwort $S = g^{**}$ ist also verboten.

Lösung 11.2

a)



b) Die richtige Antwort auf diese Teilaufgabe hängt natürlich davon ab, welchen Automaten man in Teilaufgabe a) angegeben hat. Im vorliegenden Fall:

$$\begin{aligned}
 S(\varepsilon) &= \varepsilon \\
 \forall x \in X: S(x) &= \varepsilon \\
 \forall x, y \in X: \forall w \in X^*: S(xyw) &= yxS(w)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 (2+2+1+1+2=8 Punkte)

Für das Alphabet $X = \{a, b\}$ und jedes Wort $w \in X^*$ sei $B(w) \in X^*$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 B(\varepsilon) &= \varepsilon \\
 \forall x \in X: B(x) &= x \\
 \forall x, y \in X: \forall w \in X^*: B(xyw) &= \begin{cases} abB(w) & \text{falls } x \neq y \\ xxB(w) & \text{falls } x = y \end{cases}
 \end{aligned}$$

- a) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $w \in X^*$ gilt: $|w| = |B(w)|$.
- b) Geben Sie einen Moore-Automaten mit Eingabealphabet X , Ausgabealphabet $Y = X$ und möglichst wenig Zuständen an, der jede Eingabe $w \in X^+$ gerader Länge übersetzt in die Ausgabe $g^{**}(w) = B(w)$. Was der Automat für Eingaben ungerader Länge ausgibt, ist gleichgültig.
- c) Geben Sie explizit an, welchen Wert man erhält, wenn man auf eine Eingabe w gerader Länge iteriert $|w|$ mal B anwendet.
(Hinweis: Die Notation $N_x(w)$ aus Kapitel 8 ist vermutlich hilfreich.)
- d) Gibt es einen endlichen Automaten, der die Funktion $w \mapsto B^{|w|}(w)$ aus Teilaufgabe c) berechnet?
- e) Begründen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe d)!

Lösung 11.3

a) Induktion über die Wortlänge

Induktionsanfang: $n = 0$: dann ist $w = \varepsilon$ und $|B(w)| = |B(\varepsilon)| = |\varepsilon| = |w|$.
 $n = 1$: dann ist $w = x \in X$ und $|B(w)| = |B(x)| = |x| = |w|$.

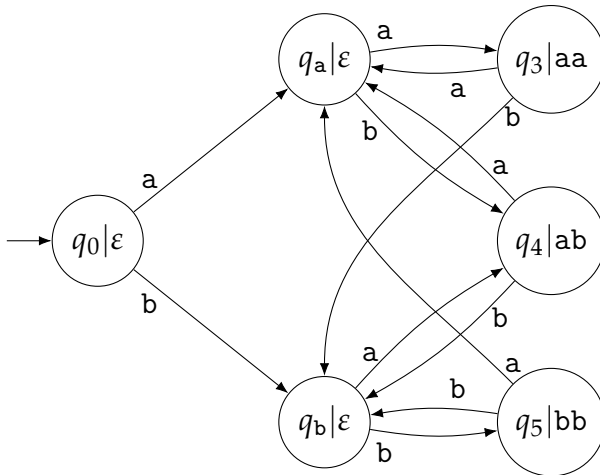
Induktionsvoraussetzung: f.e.b.a.f. n gelte: $\forall w' \in X^n: |B(w)| = |w|$.

Induktionsschluss: zeige: für alle Wörter w der Länge $n + 2$ gilt: $|w| = |B(w)|$. Sei also $w = xyw'$ mit $|w'| = n$ und $x, y \in X$.

Dann ist

$$\begin{aligned} |B(w)| &= |B(xyw')| = \begin{cases} |abB(w')| & \text{falls } x \neq y \\ |xxB(w')| & \text{falls } x = y \end{cases} \\ &= 2 + |B(w')| \stackrel{IV}{=} 2 + |w'| = n + 2 \end{aligned}$$

b)



c) Für alle w ist $B^{|w|}(w) = B(w)$.

d) • Wenn man sich auf die Wörter gerader Länge beschränkt: ja.

• Wenn es auch für Wörter ungerader Länge funktionieren soll: nein.

e) B ersetzt von links nach rechts jedes Paar ba durch ab und lässt alle anderen unverändert. Wenn man nun B auf ein solches Wort erneut anwendet, ändert sich nichts mehr. Und $B(\varepsilon) = \varepsilon = B^0(\varepsilon)$. Also gilt für alle w , dass $B^{|w|}(w) = B(w)$ ist.

• Wenn man sich auf die Wörter gerader Länge beschränkt, existiert ein endlicher Automat, der das leistet, laut Teilaufgabe b).

• Wenn es auch für Wörter ungerader Länge funktionieren soll, gibt es keinen endlichen Automaten. Zur Begründung überlege man:

1 Für Eingabe b muss die Ausgabe b sein.

2 Für Eingabe ba muss die Ausgabe ab sein. Das ist unmöglich, denn nach Teil 1 gibt der Automat nach dem ersten Eingabesymbol b schon ein b als *erstes* Symbol aus.

Aufgabe 11.4 (2+3=5 Punkte)

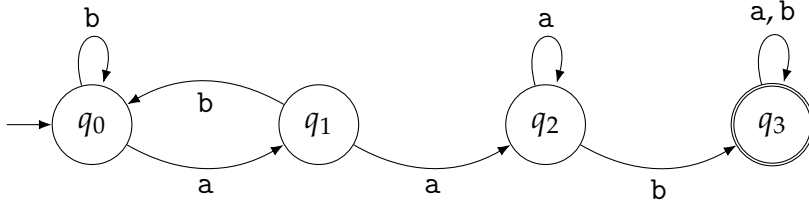
Konstruieren Sie für jede folgenden formalen Sprachen $L_i \subseteq \{a, b\}^*$ jeweils einen endlichen Akzeptor A_i mit $L(A_i) = L_i$.

a) $L_1 = \{w \in X^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } aab\}$

b) $L_2 = \{w \in X^* \mid w \notin L_1\}$

Lösung 11.4

a)



b)

